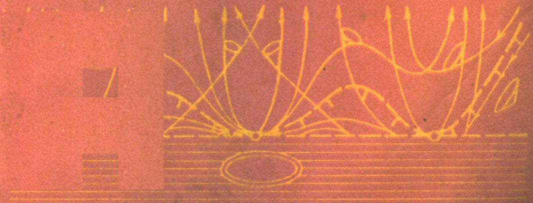
突变理论

〔苏联〕阿诺尔德 著



商 务 印 书 馆

封面设计：李淑敏

突变理论

〔苏联〕阿诺尔德 著

馆

ISBN 7-100-00775-5/B·101
定 价：2.40元

突变理论

〔苏联〕阿诺尔德 著
陈 军译
李培信校

商务印书馆
1992年·北京

V. I. Arnold

CATASTROPHE THEORY

Second, Revised and Expanded Edition, Springer-Verlag, 1984

本书根据施普林格出版公司 1984 年俄文第一版英译本和莫斯科大学出版社 1983 年俄文第二版增订本译出，后又参照施普林格出版公司 1986 年俄文第二版英译本进行了校订。

内容简介

突变理论是一门新的学科。它的价值，不仅在专家们中间，而且在报刊上，都成了激烈争论的话题。

这本小册子清晰地解释了什么是突变理论，以及它为什么会在支持者与反对者中间激起巨大的激情。本书也包含了关于奇点和分歧的数学理论中一些没有争论的结果。本书还叙述了以下各方面的研究情况：焦散面和波阵面的形状以及它们的变态、宇宙的大范围结构、最优控制问题、变分法中的奇点、可见轮廓的奇点、辛几何与接触几何等。

书中绘制了许多精美的插图，它们是本书的一个不可分割的部分。

TŪBIÀN LǏLÙN

突 变 理 论

〔苏联〕阿诺尔德 著

陈 军 译

李培信 校

商 务 印 书 馆 出 版

（北京王府井大街 36 号 邮政编码 100710）

新华书店总店北京发行所发行

河北三河县艺苑印刷厂印刷

ISBN 7-100-00775-5/B · 101

1992 年10 月第 1 版 开本 850 1168 1/32

1992 年 10月北京第 1 次印刷 字数 113 千

印数 0 3 000 册 印张 5

定价：2.40元

中文版前言

我很高兴地知道，我的书将出中文版。我希望，中国的读者们将会象苏联和其它国家的科学家们所做的那样，与突变的危险作斗争。我还希望，我们两国之间的科技合作今后将会变得更加活跃，同时也希望《突变理论》的中文版能有助于实现这一目的。

B.И.阿诺尔德

1987年6月10日于莫斯科

中译者附言

1972年汤姆《结构稳定与形态发生》一书的出版标志着突变理论的诞生，从那时到现在，已有十几年的历史了。突变理论在这十几年的发展过程中，取得了很大的进展，引起了人们的广泛注意和讨论，迄今已形成了三大学派，它们分别是法国的汤姆学派、英国的齐曼学派和苏联的阿诺尔德学派。

本书作者阿诺尔德生于1937年，是在50年代成长起来的苏联新一代数学家和科学家。在他还很年轻的时候，就与柯尔莫哥洛夫合作，解决了在一定条件下的希尔伯特第十三个问题。在1965年他与柯尔莫哥洛夫共获列宁奖。他还在分析力学、流体力学和动力系统等领域作出过重大贡献。被誉为廿世纪分析力学最重要结果的KAM定理中的字母A就是指阿诺尔德。从1965年起，他开始奇点理论及其应用的研究至今，又做出了一系列重要的工作，分别于1974年和1983年两次获得在每四年召开一次的国际数学家大会上作一小时报告的殊荣，他还于1982年与著名数学家尼伦伯格一起荣膺首届克雷福德数学奖〔克雷福德奖是由瑞典皇家科学院评选，瑞典国王颁发，奖给在数学、天文学、外太空生物学和地球科学这几个不包括在诺贝尔奖里的领域的基础研究中做出了杰出贡献的人〕。此外，法国巴黎大学于1974年授予他荣誉博士学位，美国国家科学院还于1983年将他选为国外院士。

突变理论所涉及到的数学知识是广泛而又深刻的，所以它的严格的数学表述以及基本定理的证明需要很长的篇幅才能完成，而且也不是一般读者所能理解的。要把这样深刻的理论以通俗的

方式介绍给一般读者，必须简明扼要，深入浅出，这需要有举重若轻的本领。阿诺尔德的这本书正是做到了这一点！

这本书以简洁优美的文字，丰富生动的插图，以不具备专业数学知识的读者为对象，避开了突变理论严格的数学描述和证明，而着眼于它的思想实质和它在各个领域里可能的应用，全面地介绍了突变理论的基本内容，指出了进一步研究的方向。无论是专家还是一般读者都能从不同的角度得到益处。另外还值得指出的是，这本书中大量有关苏联学者工作的介绍，极好地弥补了西方人的著作的不足。虽然本书篇幅不大，但却涉及到了许多领域中深刻的内容，而又条理清晰。也正由于本书篇幅不大，所以能使读者在极短的时间内就可获得有关突变理论的基本内容的清晰的知识。译者深信，这样优秀的著作是值得翻译出来向国内读者介绍的。

七十年代，国际上关于突变理论曾有一场大争论。在众多的论争文章中，古肯海默的《突变理论之争》一文是对有关争议作了比较全面和公允综述的好文章。为了让读者详细地了解这场争论，译者把它译出作为本书的附录。阿诺尔德于今年6月初给译者来信，对将《突变理论之争》这篇文章作为附录一事表示赞同，并欣然为中译本写了序言，而且还给译者寄来了他的另一篇关于突变理论的新作。他的这篇新作的风格与这本书的风格类似，篇幅与这本书的篇幅也大致相等，但内容却互不重复。译者希望今后能有机会，比方说作为这个中译本的第二版的一部分，将它介绍给国内的读者，使得我们对苏联的阿诺尔德学派的工作有更多的了解。

译者在翻译这本书的过程中，自始至终都得到了我的老师李培信先生和学兄余建明的指点和帮助。尤为令人感动的是，李培信先生以重病之躯，逐字逐句校阅了这个译本。译者谨在此向他

们表示由衷的谢意。

陈　　军

1987年10月于北京中关村

英文第二版前言

世界的数学描述依赖于连续性和不连续的、离散的现象之间很难把握的相互作用。人们首先认识的是不连续的、离散的现象。如蒙特尔所宣告的那样，“函数就像生物一样，由它们的奇点来刻划”。奇点、分歧和突变是用来描述从光滑、连续的结构中产生离散结构的不同的术语。

近三十年来，奇点理论已经达到了一个非常复杂的程度，这主要是由于惠特尼(1955年)、汤姆(1959年)和马瑟(1965年)等人的工作。奇点理论是一个强有力的新工具，它在科学和工程技术中有着广泛的应用，特别当它与分歧理论联合起来时更是如此。分歧理论起源于彭加勒的工作(“Thèse”，1879年)。后来，安德洛诺夫(1933年)发展了这个理论。

本书的目的，就是要向不具备数学基础的读者，解释奇点理论是怎样起作用的。但是，我希望，即使是这方面的专家，他们在这里也可以找到一些新的事实和想法。

一些人认为突变理论是奇点理论的一部分，而反过来另一些人则把奇点理论包括在突变理论之中。为了避免任何学术上的争执，我将对任何一个自称是工作在突变理论上的人，使用突变理论专家这个专有名词。这样一来，就让所讨论到的出版物的作者们可以在“奇点”、“分歧”或“突变”之间随意选择。

本书的前几章曾以一篇文章的形式刊登在莫斯科的《自然》杂志1979年第10期上。它的法文译文附有汤姆的评注，1980年发表在巴黎的《数学》上。1981年和1983年的俄文版都增添了一些

新的章节。现在的这一版是最全面的版本，它与施普林格 1983 年的那一版有许多不同的地方：它增译了俄文第二版上关于黎曼曲面、消没圈和单值等同的新的一章，更正了英文第一版上大量的印刷错误；另外，它还描述了一些最新的结果。这些结果包括有，关于隐式微分方程的奇异点和松弛振荡的理论中慢运动的标准型的一些结果，关于边界奇点和不完全分歧的一些结果，关于例外群 F_4 的焦散面的几何意义和关于正六百面体的对称群 H_4 在最优控制问题或变分法的问题中的应用的一些结果。

作者感谢汤姆教授、伯里教授和奈教授，感谢他们对本书的英文第一版提出了许多有益的建议和评注。根据汤姆的评注，"突变理论"这个专门名词是齐曼发明的，而"吸引子"这个术语是斯梅尔首先使用的，但本书的前几版把这些都划到了汤姆的名下。依据伯里的建议，我在这一版上增加了一个有注释的文献目录。除了两三个经作者惠许首次在本书中发表的结果之外，在那里专家们可以找到所有结果的来源。奈教授指出，由于一些非常有趣的整体的拓扑原因，焦散面的某些分歧，譬如"飞碟"的产生，在从短时距（或哈密顿—雅可比）方程导出的焦散面中是不可能出现的。

莫林在 1965 年的汤姆讨论会上作了一个关于惠特尼和莫林奇点的富有启发意义的演讲。之后，我与莫林进行了长达四小时的交谈，由此我学到了奇点理论。莫林向我解释了马瑟的稳定性的基本定理（在同一天，我随后发现了一个不同的证明），这是马瑟当时在给他的信中刚刚宣布的。幸乎不幸乎，我并不知道马瑟在 1968 年写过一篇没有发表的关于右等价的文章。只是在米尔诺告诉我之后，我才认识到朱丽娜在 1967 年的与马瑟类似的工作和我在 1972 年献给她的那篇关于"A、D、E"的文章之间有着某种关系。

不管是在 1965 年还是后来，我甚至连汤姆自己关于突变的演

讲的话都未能理解。在七十年代早期，当我问汤姆他是否已经证明了他的结果时，他曾经向我(用法语？)将它们描述为“bla-bla-bla”。时至今日，我也还不知道，汤姆关于在依赖于四个参数的梯度动力系统中分歧的拓扑分类的结论，在得到修正之后，即对于一般状况的度量和势能，是否正确。古肯海默在1973年给出了原来那个“汤姆定理”的一个反例，这个“定理”公布在1969年的《拓扑学》上。为了使这个定理正确，甚至还不得不增加受到突变理论专家们高度赞扬的“怪异的7”。

我也无力讨论汤姆其他的、更哲学化的或更诗化的工作。这些工作具有笛卡尔和培根之前的中世纪科学的典型风格，这就使得要想确定它们是对的还是错的，是不可能的。幸而，大拓扑学家的基本的数学发现，并没有受到任何非理性哲学的侵蚀。

如彭加勒曾指出的那样，数学家们并没有突破阻碍他们的科学发展的障碍，而只是把它们推向了它的边缘。也许，这些特殊的障碍被推得越来越远离这个边缘，以至到达了无意识的和非理性的领域。

В.И.阿诺尔德

1986年2月于莫斯科

英文第一版前言

奇点理论发展得非常迅速。自从本书的俄文版问世以来，又出现了许多新结果。譬如，在二十面体与越过一般状况障碍的问题之间的关系方面。至于详细内容，读者可参看本版的参考文献中所列的文章《射线系的奇点》(Singularities of ray systems)和《变分法中的奇点》(Singularities in the calculus of variations)①。

B.И.阿诺尔德

1983年9月于莫斯科

① 参看中译者所加的附录二。——中译者

俄文第一版前言

“专家在讨论如何预见灾难”,1977 年 11 月，纽约时报以此为题报道了突变理论。

伦敦的泰晤士报宣称突变理论为“本世纪最重要的知识成就”,而《科学》杂志上刊登的一篇关于突变理论的文章,却题为“皇帝的新衣”。

这本小册子解释了什么是突变理论以及它为什么会引起这样的争论，同时也包含了关于奇点和分歧的数学理论中一些没有争论的结果。

作者试图说明基本结果和应用的实质，只需读者具有最起码的数学素养,但要求读者具有探索的精神。

B.И.阿诺尔德

1981 年于莫斯科

目录

第一章　奇点、分歧和突变

西方新闻界关于突变理论的第一篇报道，大约发表于10年前①。在像《新闻周刊》这样一类杂志中，有报道说数学中正在发生一场或许可与牛顿发明微积分相比拟的革命。据称这个称为突变理论的新科学，与数学分析相比，对人类来说，要有价值得多。因为牛顿的理论只考虑了光滑、连续的过程，而突变理论却提供了一个研究所有跳跃的变迁、不连续性以及突发的质变的一般方法。许许多多研究论文和科普文章应用突变理论于广泛的领域，诸如心脏跳动、几何光学与物理光学、胚胎学、语言学、实验心理学、经济学、流体力学、地质学和基本粒子理论等领域的研究。在已发表的关于突变理论的著作中，有船的稳定性的研究、大脑活动和精神紊乱的模型、囚徒暴动的模型、股票交易投资者行为的模型、酒精对驾驶员的影响以及对黄色文学的审查政策等的研究。

在七十年代早期，突变理论很快成为风靡一时、众所周知的理论。这个理论由于其意欲无所不包，不禁使人想起上个世纪那些伪科学理论。

突变理论的创立者勒内·汤姆的数学论文被印成了袖珍本②。这是自从控制论创立以来数学中没有过的事情。突变理论从控制论那里学到了很多宣传的方法。

在突变理论的这些赞扬声之中，也出现了一些较严肃的批评

---

① 大约是1971年。——中译者

② Thom, R.: Modeles mathematiques de la morphogenese. Editions 10-18, UGE, Paris, 1974. 现在该书已有英译第二版。——中译者

文章，其中一些冠以像“皇帝的新衣”这样一些含意隽永的标题，发表在一些读者众多的刊物上。现在，已经有了许多专门批评突变理论的文章。（例如，可参看约翰·古肯海默1978年写的综述文章《突变理论之争》以及1979年那篇模仿突变理论的讽刺性批评文章①。）

突变理论起源于哈斯勒·惠特尼关于光滑映射的奇点理论，以及彭加勒和安德洛诺夫关于动力系统的分歧理论。

奇点理论极大地推广了函数在极大值点和极小值点的性质的研究。在惠特尼的理论中，函数被代之以映射，就是几个多元函数的组合。

分歧这个词就是分叉的意思，并且在一种广泛的意义下，用来表示各种对象在所依赖的参数变化时，产生的所有定性的变形或变态。

突变是由于系统对光滑变化的外部条件的突如其来的反应而产生的突发的变化。为了理解突变理论，首先必须熟悉惠特尼奇点理论的基本内容。

---

① Guckenheimer, J.: The Catastrophe Controversy. The Mathematical Intelligencer 1978, vol. 1, no. 1, pp. 15-20; Fussbudget, H. J. and Znarler, R. S., Sagacity Theory: A Critique, 在同一期刊上，1979, vol. 2, no. 1, pp. 56-59.

第二章　惠特尼奇点理论

美国数学家哈斯勒·惠特尼在1955年发表的论文《平面到平面的映射》，奠定了一门新的数学理论——光滑映射的奇点理论——的基础。

一个曲面到平面的一个映射将曲面上的每一个点对应于平面上的一个点。如果曲面上的点用曲面上的坐标(x_1,x_2)表示，而且平面上的点用平面上的坐标(y_1,y_2)表示，那么映射就由一对函数$y_1=f_1(x_1,x_2)$和$y_2=f_2(x_1,x_2)$给出。映射称为光滑的，如果这些函数是光滑的(即像多项式那样，任意次可微)。

在我们的周围，光滑曲面到平面上的映射俯拾皆是。的确，我们周围大多数物体的边界都是光滑曲面。物体的可见轮廓就是其边界曲面在眼睛的视网膜上的投影。通过考察四周的物体，譬如，人的面部，我们就可以研究可见轮廓的奇点。

惠特尼发现：一般状况地(generically)①，只会碰到两类奇点。在物体的微小运动或者投影方向的细小变化之下，所有其他类型的奇点都将分解开来，但这两类奇点却是稳定的，因而在映射的微小形变之下依然存在。

第一种奇点，惠特尼称其为折迭，就是当球面投影到平面上时，赤道上出现的那种奇点(图1)。在适当的坐标之下，此投射由公式$y_1=x_1^2$和$y_2=x_2$给出。光滑物体的曲面在视网膜上的投影，在一般状况的点上恰有这种奇点，这并不使人感到惊讶。惊讶的是除了折迭这种奇点以外，还恰好存在着另一种奇点，而实际上这

① "一般状况地"意即除某些例外的一切其他情形。

是我们以前从来没有注意到的。

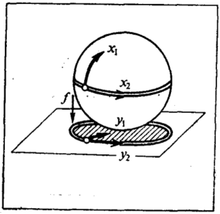


图 1

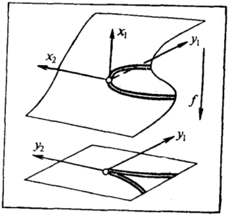


图 2

第二种奇点，惠特尼将其命名为尖点。它可由图 2 中那样的一个曲面投影到平面上而得到。使用空间坐标(x_1, x_2, y_1)，这个曲面就由方程 $y_1 = x_1^3 + x_1x_2$ 表示，再将这个曲面投影到水平面(x_2, y_1)上。

因此，在局部坐标之下，此投射由公式 $y_1 = x_1^3 + x_1x_2$ 和$y_2 = x_2$给出。

在水平投影面上，可看到一条带一尖点的半立方抛物线，其中尖点在原点。这条曲线将水平面分为两部分：较小部分和较大部分。较小部分的点有三个逆象，即曲面上投影到平面上该点的三个点；较大部分的点只有一个逆象；这条曲线上的点有二个逆象。当从较小部分趋近这条曲线时，三个逆象之中的二个将合二为一，并进而消失掉（此处的奇点为折迭），而趋近尖点则所有三个逆象都将重合为一点。

惠特尼证明了尖点是稳定的，即每个邻近的映射都在一适当的邻近点上仍有这种奇点。这也就是说，一个奇点称为是稳定的，如果每个邻近的形变了的映射在该奇点某适当邻近点的一个邻域

上，在适当的坐标之下，都可由刻划原来那个映射的公式表示。惠特尼还证明了在一个适当的小扰动之下，曲面到平面上的光滑映射的每一个奇点都将分解成为一些折迭和尖点。

因此，在一般状况的光滑物体的可见轮廓上的点为尖点，如果该点是投影映射的尖点型奇点。而且该轮廓还无其他的奇点。仔细瞧瞧，我们就不难在每付面孔和每个物体的轮廓线上找到这种尖点。例如，我们考虑光滑环面这种曲面(比方说，一个充气的轮胎)。通常把这种环面画成图3所示的那个样子。如果环面是透明的，我们就可以看到如图 4 所绘的可见轮廓。把环面投影到平面上的相应映射拥有四个尖点型奇点。于是，图 3 中可见轮廓的曲线的端点都是尖点。可见轮廓的曲线的这些点都是半立方奇点。

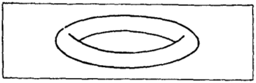


图 3

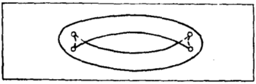


图 4

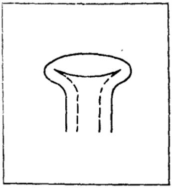


图 5

透明的环面很少见。我们来考察其它的透明物体，譬如，瓶子，最好是奶瓶。在图 5 中可看到两个尖点。我们稍许挪动一下瓶子，就可推出尖点是稳定的结论。于是，我们得到了惠特尼定理的一个令人信服的实验证明。

在惠特尼的奠基性工作之后，奇点理论发展迅猛。现在，它已成为了数学的最重要的领域之一。在这个领域内，数学的最抽象

部分(微分几何、代数几何、拓扑学、反射群论、交换代数以及复空间理论等等)与最实用部分(动力系统运动的稳定性理论、平衡态的分歧理论、几何光学和波动光学等等)融为了一体。勒内·汤姆和齐曼认为,应该将奇点理论及其应用统称为突变理论①。

① 参见中译者所加的附录一。——中译者

第三章　惠特尼理论的应用

因为光滑映射无处不有，所以它们的奇点也一定无处不在。又由于惠特尼理论提供了关于一般状况映射奇点的重要信息，因此，我们可尝试着利用这些信息，对科学的所有领域中大量的各种各样的现象和过程进行研究。这个简单的思想就是突变理论的全部精髓。

当对我们所牵涉的映射有足够详尽的了解时，或多或少我们总可以直接应用数学的奇点理论于各种自然现象。正如在弹性理论和几何光学(即焦散面和波阵面的奇点理论，后面我们将对此作详细的阐述)中那样，这类应用确可导出有用的结果。

然而，论述突变理论的大多数著作考虑的却都是颇有争议的情形。在这些情形下，不仅所研究的映射的详情未知，而且就是其是否确实存在也很成问题。

奇点理论在这些情形中的应用纯属推测；为了使读者对这类应用有一个大致的印象，我们来复述由英国数学家克里斯托弗·齐曼[①]给出的，推测性地应用惠特尼理论研究富有创造力的人的活动(细节不完全相同)。

我们将用三个参数来刻划一个富有创造力的人——例如，科学家。这三个参数分别称之为“技能 (technical proficiency)”、“激情 (enthusiasm)”和“成就 (achievement)”。很清楚，这些参

① Zeeman, E. C.: Catastrophe theory: A reply to Thom, in: Dynamical Systems-Warwick 1974. Springer-Verlag, Lect. Notes Math. 468, Berlin-Heidelberg-New York 1975, p. 373.

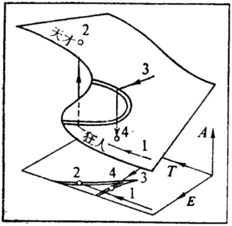


图 6

数相互之间是有联系的。因此，它们在用坐标(T,E,A)表示的三维空间中给出了一个曲面。我们将此曲面沿A轴投影到(T,E)平面上。惠特尼定理告诉我们，对于一般状况的曲面来说，奇点不外是折迭和尖点。据称图6所示的尖点模型足以描述上述观察到的现象。

事实上，我们来看在这些假定之下，一个科学家的成就是怎样随着技能和激情的变化而变化的。如果激情不高，那么成就将随着技能单调地且相当缓慢地增长；而如果激情足够高，那么就会开始出现性质不同的现象。在这种情况下，随着技能的提高，成就将出现一跳跃性的增长（例如，当激情和技能沿着曲线1变化时，这样的一个跳跃将发生在图6中的点2处）。在图6中，用“天才”这个词表示我们随之所到达的高成就区域。

然而，只有激情的增高，而不伴之以技能的提高，将导致一灾变（发生在图6中曲线3的点4上）。在此处，成就将出现一跳跃性的减少而落到图6中用“狂人”这个词来记的区域。有启发意义的是，我们看到，从天才状态跳到狂人状态而后又返回到天才状态，是沿着不同的路线行走的，以致在足够大的激情之下，一个天才和一个狂人可以拥有相同的激情和技能，而相差的只是成就（和以前的历史）。

这个模型以及突变理论中许多类似推测的缺陷一眼即可看出，无须细说。我仅指出：论述突变理论的文章的特点，就是对严格性要求的灾难性减低和对结果的新奇性的追求。如果把前者看

作是和数学中严格而枯燥的模仿性工作的传统作法唱反调的话，人们是可以理解的。但是，他们对前辈——大多数具体结果是他们做出的——缺乏敬意这一点，却是不可辩白的。两者的动机与其说是科学的，倒不如说是社会的①。

① "我想，亲爱的，这一切堕落的行为不过只是一种商人的手法而已。"——引自多罗谢维奇著1966年莫斯科出版的《短篇小说和随笔》第295页。

第四章　突变机

与前章所述例子形成对照，应用奇点理论来研究弹性理论中平衡态的分歧，却是无可指摘的。

在许多弹性结构中，在相同的外部重物作用下，可能有若干个不同的平衡态。譬如，考察一根水平放置的尺子，它的两端被铰链固定，而且中央还放了一个重物。

同尺子在重物的作用下向下弯曲这个平衡态一样，也可能存在尺子向上弯曲形成一个像一座桥式的拱形这样的平衡态。

随着重物重量的增加，在某一点会出现一个“突变”或“屈曲”：尺子从一种状态跳到另一种状态。奇点理论可以被用来对这些屈曲进行研究，而且所作出的预测还得到了实验很好的证实。

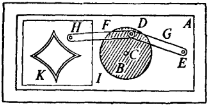


图 7

人们已经发明了很多用来直观地解释这类应用的装置，其中有一个最简单的叫做齐曼突变机，如图 7 所示。

这个突变机是很容易造的。需要一张纸牌（A）（见图 7）和一块硬纸板做成的圆盘（B）。将大头针（C）穿过圆盘（B）的圆心，把圆盘（B）钉牢在纸牌（A）上，使（B）可自由转动。另一口大头针（D）只钉在圆盘（B）的边缘上，第三口大头针（E）只钉在纸牌（A）上。为了完成齐曼突变机的装配，另外还需两根极富弹性的橡皮筋（F，G）、一支铅笔（H）和一张纸（I）。

把圆盘(B)边缘上的大头针(D)与固定不动的大头针(E)和铅笔(H)，用两根橡皮筋连接起来。然后我们再将铅笔的笔尖放在纸片(I)的某一点上，使得橡皮筋(F,G)都拉伸开来。圆盘(B)固定在某个位置上。那么，当我们挪动铅笔(H)时，圆盘(B)就会转动。结果就会发现，铅笔(H)在某些位置少许挪动一下，就可导致一个“突变”，即圆盘(B)跳到一个新的位置。我们将所有这些“突变位置”标在纸片(I)上，就得到了“突变曲线”(K)。

结果是，所得的突变曲线有四个尖点。当跨越突变曲线时，是否会发生跳跃，取决于铅笔(H)在尖点附近挪动所走的路线。

通过用齐曼突变机做试验，试图导出决定跳跃是否发生的规律，读者将深信确有建立这类现象的数学理论的必要，因而也就能更好地欣赏到这样来解释奇点理论的价值。

用三个数来描述齐曼突变机的状态。铅笔笔尖的位置由两个坐标(称为控制参数)给出。圆盘的位置由另一个参数(旋转角)决定，也称这个参数为此系统的内在参数。如果所有三个参数都已给定，那么橡皮筋的拉伸程度以及由此而决定的整个系统的势能也都是确定的。圆盘转动直至势能为最小(至少是局部的)而止。固定铅笔的位置，则势能就是圆盘位置的函数，即定义在圆周上的函数。这个函数可有一个或几个依赖于控制参数的值的极小值(图8,a)。如果极小值的位置是随着控制参数变化而光滑地变化的话，那么就不可能出现跳跃。跳跃出现在控制参数的那些值上，在这些值上，局部极小值由于与局部极大值相遇而消失了(图8,b)；发生跳跃之后，圆盘将到达一个对应于另一局部极小值的位置(图8,c)。

我们来考察齐曼突变机的三维状态空间。圆盘的所有平衡态形成这个空间的一个光滑曲面。我们将此曲面沿内在参数的轴投影到控制参数的平面上(图9)。这个投影既有折迭又有尖点。折

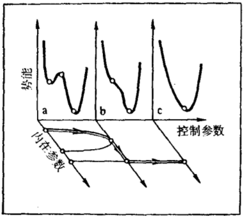


图 8

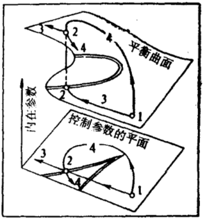


图 9

迭点的投影恰巧就是突变曲线。图 9 清晰地解释了，为什么跨过突变曲线的控制参数的移动，有时会引起跳跃而有时又不会引起跳跃，——这取决于圆盘的位置对应在这个曲面的哪一部分上。从图 9 还可看出，从平衡曲面的一个地方挪到另一个地方而不发生跳跃，也是可以办到的。

突变理论的大多数应用的步骤都与前述例子的步骤相同。假定所考虑的过程都可借助于若干个控制参数和内在参数来描述。这个过程的平衡态形成这个空间中某维数的一个曲面。平衡曲面在控制参数的平面上的投影可能有一些奇点。假定这些奇点都是一般状况的奇点。在这种情况下，奇点理论就可预告"突变"——由于控制参数变化而导致的从一个平衡态到另一个平衡态的跳跃——的几何。在大多数重要的应用中，奇点都是惠特尼尖点，而这个结果却是早在突变理论出现以前就已知道的。

上述类型应用的可靠性程度与它们的初始前提的可靠性程度相同。例如，在弹性结构的屈曲理论和船舶的倾覆理论中，突变理论的预测就被实验完全证实了。然而，在生物学、心理学和社会科

学中——例如，在股票市场买卖者的行为理论的应用中或神经病研究的应用中，所得的结论就像它们的初始前提一样，只是颇有启发意义罢了。

第五章　平衡态的分歧

一个发展过程(evolutionary process),用数学语言来描述，就是相空间上的一个向量场。相空间的一个点代表系统的一个状态。这个点上的向量表示这个状态变化的速度。

某些点上的向量有可能为零。这样的点称为平衡位置（不随时间变化的状态)。图10中绘制的是，描述捕食其它动物的动物和被捕食的动物(譬如，梭鱼和鲤鱼）相互之间关系的系统的相空间。此相空间为平面的第一象限。水平轴标记鲤鱼的数量，垂直轴标记梭鱼的数量。点P为平衡位置。点A对应的是鲤鱼的平衡数与梭鱼小于平衡的数。很显然，到一定的时候将会发生振荡。因此，图10中的平衡态P是不稳定的。用相平面上的一条闭曲线表示此振荡。这条闭曲线称为极限环。

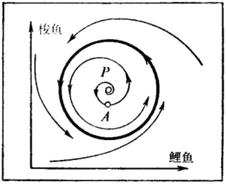


图 10

相空间中表示一个过程连续不断的状态的曲线都称为相曲线。在非平衡态的点的邻域内，把相空间分为一些相曲线就像是把相空间分为一些平行直线。因为坐标的一个光滑变化，就可将相曲线族变为平行直线族。但在平衡点的邻域内，图形却要复杂得多。彭加勒证明：在一般状况系统的相平面上的平衡点的邻域内，相曲线的行为如图11所示。在系统的一般状况小扰动之下，所有

更复杂的情形都将变成上述那些情形的组合。

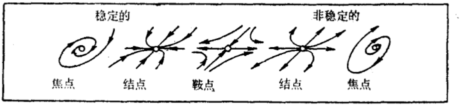


图 11

描述实际存在的发展过程的系统通常都是一般状况的。事实上,这样的系统总是依赖于一些从未确知的参数,而这些参数的一个一般状况小变化就可将一个非一般状况系统变为一个一般状况系统。

因此,一般来说,比上面所描述的要复杂的所有情形实际上应该是碰不到的,因而一看就知道可以对其不予理会。这种观点使得微分方程理论的大部分和整个数学分析的大部分都毫无用场了。因为这些理论的传统习惯是,把主要精力放在很难研究而又毫无实际意义的非一般状况的情形的研究之上。

然而,如果感兴趣的不是单个的系统,而是依赖于至少一个参数的系统族,那情况就大不一样了! 下面,我们考虑所有系统组成的空间(图 12),并把这个空间分成一些由一般状况的系统组成的区域。分界曲面由退化的系统组成;只要参数值稍许变一下,一个退化系统就变成非退化的了。系统的一个单参数族就用图 12 中的一条曲线来表示。这条曲线可与分隔非退化系统的不同区域的边界横截地相交(即交角不为零)。

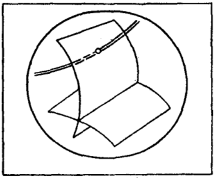


图 12

因此，虽然对参数的每一单个的值来说，一个小扰动就可将一个系统变成非退化的系统，但是对参数所有的值来说，这却是不可能同时做到的。因为，和所考虑的曲线靠近的每一条曲线，与分界的边界在参数的一邻近值处相交，换言之，在参数给定值处的小扰动可消去退化，但退化又会重新出现在某个邻近值处。

故而，当考虑的是整族而非单个的系统时，退化的情形是不可消去的。如果系统族是单参数族，那么就只有最简单的退化系统是不可消去的，所谓最简单的退化系统就是由在所有系统组成的空间中余维数为一(即由一个方程给出)的边界表示的系统。用单参数族的小扰动，就能够消去那些更复杂一点的退化系统，即在所有系统组成的空间中形成一个余维数为二的集合的那些退化系统。

如果我们感兴趣的是双参数族，那么就不必考虑那些形成的是一个余维数为三的集合的退化系统，如此等等。

这样，根据余维数的大小，我们就给出了退化系统的一个等级分类，因而也就有了进行研究的策略：我们首先研究一般状况的情形，其次是余维数为一的退化系统，再次是余维数为二的退化系统，等等。这样来研究退化系统需注意的是，我们不可将研究范围局限于退化瞬间的情形，而是必须包括当参数通过退化值时将会发生的变形的描述。

上述研究总纲领是彭加勒提出的。它不仅可以应用于发展系统平衡态的研究，而且还可以应用于整个数学分析的大部分中。尽管彭加勒关于分歧理论的纲领的提出已是一百年以前的事了，但是在分析的大多数领域中，它的实现却进展相当缓慢。这部分地是由于数学上巨大的重重困难；部分地是由于心理上的惰性和公理化代数的风格占统治地位。

不管怎样，让我们回到发展系统的平衡态上来。目前我们可以认为得到了解决的，只有在单参数的一般状况族中，平衡态的分

歧上相曲线的变形问题；甚至连双参数的情形也是现时知识力所不能及的。

一般状况单参数族的研究结果总括在图 13—18 中。图 13 描绘的是相空间为一维的发展过程的单参数族（参数 ε 为水平轴，系统的状态 x 为垂直轴）。

对于一般状况的单参数族，所有参数值的平衡态形成一条光滑曲线（图 13 中的 Γ；在更一般的情形下，平衡态组成的流形的维数等于参数的个数）。特别地，这意味着图 14 的左边所绘的分歧在一般状况族中是不会出现的，因为这种小扰动可把 Γ 变成图 14 的右边那些类型① 的光滑曲线之一。

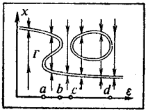


图 13

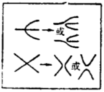


图 14

对于单参数族来说，Γ 在参数轴上的投影仅有折迭型奇点（对于有更多参数的族，会出现惠特尼理论中更复杂的奇点。譬如，在一般状况的双参数族中，平衡曲面 Γ 在参数平面上的投影可能有尖点，在这种点上三个平衡态叠在一起）。

于是，当我们改变参数时，我们能够把参数的奇异值或分歧值（图 13 中投影的临界值 a、b、c、d）从中挑选出来。当参数远离这些值时，平衡态光滑地依赖于参数；而当参数趋近分歧值时，一个平衡态由于与另一个平衡态结合而“死亡”了（或者走另一条路，就会

① 注释：“类型”在这里意即二维参数化了的相空间作为一个整体，在微分同胚意义下的等价类，而不是在纤维化了的微分同胚（与参数化有关的微分同胚，当参数变化时，它自身就是一维相空间的微分同胚的一个参数化了的族）意义下的等价类（这可能要强一些）。

“从无到有地”出生一对平衡态来)。

在两个同时出现(或逝去)的平衡态之中,一个是稳定的,另一个却是非稳定的。

在出生(或死去)的那一刻,两个平衡态都以无限大的速度运动:当参数值与分歧值相差ε时,两邻近平衡态之间距离的阶为$\sqrt{\varepsilon}$。

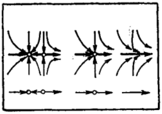


图 15

图 15 将一般状况单参数族的相曲线族的变态绘在平面上。当参数变化时,稳定平衡态(“结点”)将与一非稳定平衡态(“鞍点”)发生碰撞,随之两者都消失了。在融合的那一刻,在相平面上,可观察到一种非一般状况的情形(“鞍式结点”)。

从图 15 可以看出这个变态实质上是一维的。因为沿水平轴将会出现与图 13 中x轴上相同的现象,但沿垂直轴则什么变形也不会发生。因此,过鞍式结点的变态可从一维变态沿纵轴“撑开”(suspension)而得到。可以证明,一般地,一般状况的单参数系统中平衡态的所有变态都可从一维变态经类似的撑开来得到。

如果稳定平衡态描述的是某个真实系统(比方说,经济学、生态学或化学)中的稳定状态,那么稳定平衡态与非稳定平衡态的融合,必将使该系统跳到一个完全不同的状态,因为随着参数的变化,所考虑邻域内的平衡条件会突然间消失。正是对这类跳跃现象的研究导致了“突变理论”这个专门名词的出现。

第六章　平衡稳定性的失去与行为的自振荡模式稳定性的失去

由于参数变化而导致一个平衡态失去稳定性，与该平衡态的分歧是没有必然联系的。因为一个平衡态不仅与另一状态发生碰撞可以失去稳定性，而且也可以独自失去稳定性。

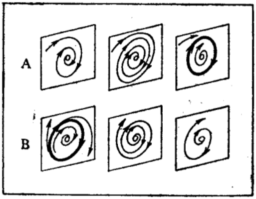


图 16

图 16 上标出的是平面上相图相应的变形。两种形式都可能出现：

A．随着参数的变化，从平衡态将产生出一个（半径为$\sqrt{\varepsilon}$阶的，其中参数与分歧值相差ε）极限环。平衡态的稳定性转变为极限环，而平衡点本身变成非稳定的了。

B．非稳定极限环在平衡态的瓦解：平衡态的吸引区域收缩为空集，非稳定极限环也就消失了，而其非稳定性变成了平衡态。

下述结果是由彭加勒提出，并由安德洛诺夫以及他的学生们在第二次世界大战前的 1939 年① 证明的。对于相空间为二维的

---

① АНДРОНОВ А. А., Леонтович Е. А., Некоторые случаи зависимости Лредельных циклов от параметров. Ученые записки Горьковского государственного Университета. Вып. 6, 1939, с. 3-24.
这些结果也可在安德洛诺夫、维特和哈金的名著《振荡理论》(Theory of Oscillations)的第一版中找到。该书是 1937 年在莫斯科出版的，其英译本由普林斯顿大学出版社于 1949 年出版。

系统的一般状况单参数族来说，除了（第五章所描述的）稳定平衡态由于其与非稳定平衡态的融合而导致稳定性的失去，以及刚才所描述的 A 和 B 两种情形以外，再没有其他形式的失去稳定性的方式了。之后又证明了，在相空间为更高维的系统中，由于单个参数的变化而导致平衡态稳定性的失去，也必采取上述方式中的某种方式（在所有其他坐标轴的方向上，当参数变化时，平衡态仍然保持吸引性）。

如果我们的平衡态是现实系统中既定的行为，那么在参数的变化之下，在情形 A 和情形 B 中可观察到下列现象。

A．在平衡态失去了稳定性之后，肯定就会发生周期振荡行为（图 17）。此振荡的振幅与临界差（criticality）——参数与临界值（在其上平衡态失去稳定性的参数值）的差——的平方根成比例。

这种失去稳定性的方式叫做稳定性的弱失去，因为只要临界差很小，这种振荡行为就与平衡态相去无几。

B．在既定的状态失去稳定性之前，该状态的吸引区域就已变得非常小了，因而时常有的随机扰动可将系统抛出这个区域，直至吸引区域完全消失。

这种失去稳定性的方式叫做稳定性的强失去。在这里，系统从稳衡（stationary）状态跳到一个不同的运动状态（见图 18）。这个状态可以是另一个稳定的稳衡状态，也可以是稳定的振荡，还可以是某个更复杂的运动。

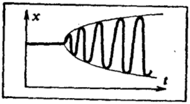


图 17

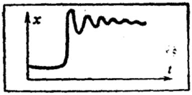


图 18

运动的这些能确定自身的状态现在称之为吸引子，因为这些

状态“吸引”邻近的状态——过渡状态。(吸引子就是相空间中的吸引集。那些是非平衡态或者非严格周期振荡的吸引子被命名为奇异吸引子,这种吸引子与湍流问题有关。)

六十年代初,斯梅尔、阿诺索夫和西纳依在关于动力系统的结构稳定性的一些文章中,证明存在这样的吸引子,在其上的相曲线指数地发散,而且还证明这类现象具有稳定性。

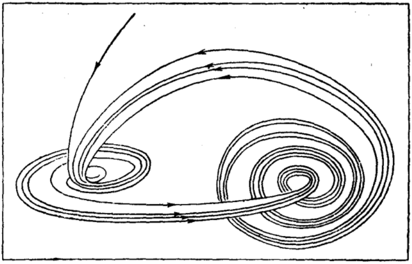


图 19

与这些理论工作毫无联系的是,气象学家罗伦兹在 1963 年叙述了,他在模拟对流的计算机实验中所观察到的三维相空间中的一个吸引子,相曲线沿各个方向从这个吸引子发散出来(图 19),并且还指出了这种现象与湍流的联系。

在阿诺索夫和西纳依的文章中,特别证实了曲率为负的曲面(鞍点就是这种曲面的一个例子)上质点运动的指数发散现象。指数发散理论在流体动力学的稳定性的研究中的首次应用,发表于 1966 年。

流体的运动可描述为弯曲的无穷维曲面上质点的运动。这个

曲面的曲率在许多方向上为负，这些方向导致轨线快速发散，即导致流从初始条件是不可预测的。特别地，这意味着做长期的动态气象预报实际上是不可能的：要做提前一到两个月的预报，初始条件就必须精确到预报精确度的 10^{-5} 倍。

不管怎样，我们回到在平衡态失去稳定性之后确定自身的行为模式上来，并且假设这种行为是奇异吸引子（即既不是平衡态，也不是极限环）。

系统演变到这样的行为，也就是说在其中可观察到复杂的非周期振荡。这种振荡的精微之处对初始条件的细小变化反应非常敏感，而与此同时这个行为的平均特征却是稳定的并且（当初始条件在某个区域内变化时）是不依赖于初始条件的。观察这样的系统运动的实验者，可能称这种振荡为湍流。随着流体的雷诺数的增大，即粘滞性的降低，层流失去了稳定性，这时就可观察到该流体的无序运动。似乎在数学上，这种运动恰好可用该流体的相空间中这种复杂的吸引子来描述。这种吸引子的维数对于任意雷诺数都是有限的〔就不带边的二维闭流形上的流来说，伊利雅申科最近得到了这个维数的上界的阶为 Re^4；对于二维的带边流形，维什克和巴宾得到这种吸引子的维数的上界为 $\exp(Re^{4+\varepsilon})$①〕，但是当 Re 趋向无穷大时，这个维数也趋向无穷大。

一个过程从稳定平衡态（“流体的层流”）到奇异吸引子（“湍流”）的转变，可以或者用跳跃（为稳定性的强的或突变的失去）来完成，或者在稳定性的弱失去之后得以实现(图 20)。此外，在后一种情形下，自生出来的稳定环会失去稳定性。在系统的一般状况单参数族中，环失去稳定性可以几种方式进行：1）与非稳定环相撞（图 21），2）加倍（图 22），3）环面的出现或消失（图 23）（安德洛诺夫的

① 1983 年的最新结果：对于二维的不带边流形和二维的带边流形，维什克和巴宾的估计分别为 $Re^2 \ln^{1/2} Re$ 和 Re^4。

术语：稳定环脱皮）。这最后两个过程的细节，依赖于沿环面子午线和沿环面轴线运动的频率之间的共振，即依赖于这两个频率的比是有理数还是无理数。有趣的是，分母为 5 或者更大数的有理数所起作用实际上就像无理数。

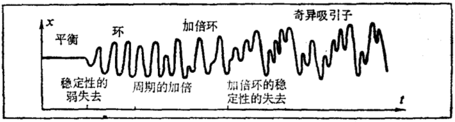


图 20

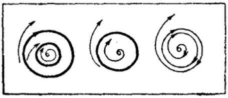


图 21

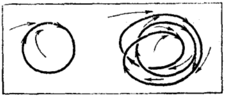


图 22

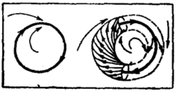


图 23



图 24

靠近环的相曲线的性态，可以借助于环为平衡态的发展过程来近似地描述。现在，博格达诺夫和霍罗佐夫，对这样产生的近似系统，除了那些靠近频率比为 1∶4 的强烈共振的情形以外的所有情形，都做了分析。图 24 中绘的是近似平面系统中相曲线族的变态，与这些变态对应的是在三维空间中环的邻域内相曲线分布的变态：假定稳定性的失去发生在共振为 1∶3的附近。图 25 中绘的

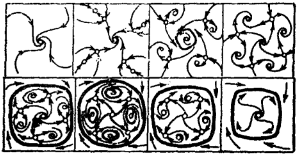


图 25

是在共振为 1:4 的附近可能发生的事件的序列之一。别列佐弗斯卡亚、希布尼克和涅伊施塔特得到关于这个共振的这些基本结果，采用的不是严格的数学论证的方法，而是猜测与计算机实验相结合的方法。

前面阐述的关于平衡态稳定性的失去的彭加勒—安德洛诺夫理论，在振荡理论的各个分支（自由度为有限个的系统和连续介质）中都有非常广泛的应用，不可能在这里把它们一一列举出来：力学、物理、化学、生物学和经济学等中的系统老是失去稳定性。

在关于突变理论的文章中，通常都称平衡态稳定性的弱失去为霍普夫分歧。这多少是由于我的“过失”所造成的，因为在一九六五年的一次与汤姆关于彭加勒—安德洛诺夫理论的交谈中，我特别强调了霍普夫的工作。霍普夫把这个理论的一部分推广到了多维的情形。

就像在奇点理论中那样，在分歧理论中也没有借助于突变理论，就得到了基本结果及其应用。突变理论做出的毫无疑义的贡献，就是引入了吸引子这个术语并且传播了关于吸引子的分歧的知识。现在，在振荡理论的所有领域中已经发现了各种各样的吸引子；例如，有人指出，词的不同的音素就是造声动态系统不同的吸引子。

甚至在十年前，当任何一个实验者比方说在化学反应中发现了复杂的非周期振荡时，他会把这归咎于实验不纯和偶然的外部作用等等，而不加考虑。但是现在许多人知道，这些复杂的振荡可

能是与该事物的内在本质有关，也可能是由该问题的基本方程决定，而不可能是由随机的外部作用决定；同过程行为的典型的稳衡模式和周期模式一样，我们能够而且也必须对这些复杂的非周期振荡进行研究。

第七章　稳定性边界的奇点与好景不长原理

我们来考虑一个依赖于多个参数的系统的平衡态，并且我们假设平衡态在参数的某个变化区域内不会分歧。

我们将用参数轴上（如果有二个参数则是在参数平面上，如果有三个参数则是在参数空间里，等等）的一个点，来表示对应于参数的某个值的那个系统。

然后，依据平衡态是否稳定，我们将参数空间中所研究的区域分为两部分。于是，我们就得到了参数平面上或者参数空间里的**稳定区域**——由对应的平衡态是稳定的那些参数值组成、**非稳定区域**以及分隔它们的**稳定性边界**。

根据彭加勒总纲领（见第五章），我们将只限于研究以一般状况的方式依赖于参数的系统族。结果是，稳定边界可能具有在该族的小扰动之下不会被消去的奇点。

图 26 刻画的是，（具有任意维的相空间的）进化系统的一般状况双参数族中平衡态的稳定边界的所有奇点，而图 27 刻画的则是三个参数的族的情形。两图中的公式描绘的都是在参数平面上或

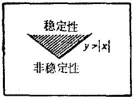


图 26

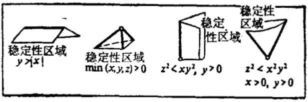


图 27

参数空间里适当选择的坐标下的稳定区域。一般来说，这些区域都是曲边的。

我们注意到，在所有情形下，稳定区域都是"角朝外的"，因而是以楔形嵌在非稳定区域内的。因此，对于属于稳定性边界的奇异部分的系统，参数的一个小变化就很可能使该系统进入非稳定区域，而不是进入稳定区域。这就是那个说所有的良态（例如，稳定性）比劣态都要脆弱的一般原理的一种具体表现形式。

似乎在好的情形下，许多要求必须同时得到满足，而称一情形为坏的却甚至只需一个要求得不到满足就足够了。

在四个参数的情形中，我们还须在上面列举的稳定边界的奇点中另加上二种奇点。随着参数个数的增加，一般状况族的稳定边界上奇点类型的数目将急骤地增大。但是，列旺托弗斯基证明：无论参数的数目多么大，奇点类型（用参数的光滑变化不能互相转化）的数目总是有限的，而且好景不长原理仍然成立。

第八章　焦散面、波阵面以及它们的变态

奇点理论的最重要的结论之一：像折迭和尖点这样一些简单形式具有普遍性(universality)。于是，人们可以预期能处处见到它们，因而学会识别它们也是有用的。除了上面列举的奇点以外，人们还常常见到另外一些各有自己名称的更复杂类型的奇点："燕尾"、"金字塔"〔汤姆称之为"椭圆型脐点"(elliptic umbilic)〕、"钱包"〔汤姆称之为"双曲型脐点"(hyperbolic umbilic)〕等等。

假设有一种扰动(比如，冲击波、光或者一种传染病)正在某种媒质中传播。

为简单起见，我们从平面情形入手。我们还假设扰动在初始时刻位于曲线 a 上(图 28)，并且扰动传播的速率为 1。为了确定扰动在时刻 t 将到达何处，我们须要沿曲线 a 的每一条法线向该曲线外画一条长为 t 的线段。所得到的曲线称为波阵面。

即使初始波阵面绝无奇点，但在某一时刻之后，也将开始出现奇点。例如，扰动在椭圆内的传播，就出现了如图 29 所示的奇点。

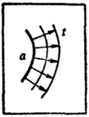
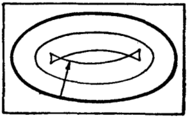


图 28


图 29

这些奇点都是稳定的，即在初始波阵面的小扰动之下，这些奇点都

是不可消去的。对于一般状况的光滑初始波阵面来说，随着时间的推移，也只会出现这种类型的标准奇点。

在初始波阵面的小扰动之下，所有其它奇点(例如，在收缩圆的圆心处的奇点)都将分解成为几个标准型的奇点。

在一般状况的三维光滑波阵面上，随着时间的推移，只可能出现图30中所示的尖脊和标准的燕尾型奇点(试着绘出在三维空间中的椭球面里传播的波阵面的奇点)。在波阵面的小扰动之下，所有更复杂的奇点，都将分解成为一些尖脊与自相交曲线相联的燕尾。

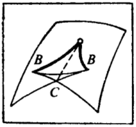


图 30

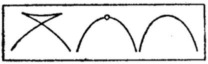


图 31

燕尾可定义为所有使得多项式 x^4+ax^2+bx+c 有重根的点 (a, b, c) 组成的集合。在这张曲面上有一条尖脊(图30中的 B)和一条自相交曲线(图30中的 C)。

燕尾也可从空间曲线 $A=t^2$、$B=t^3$、$C=t^4$ 得到，——这条曲线的所有切线就形成了燕尾。

我们来研究燕尾与平行平面在一般状况的位置上的交线(见图31)。

这些交线都为平面曲线。在平行平面移动而通过燕尾的顶点的那一刻，这些曲线的形式发生了变化。此处的这个变化(变态)恰好与平面上波阵面(例如，扰动在椭圆内传播的过程中)的变态一致。

我们可以如下地描述平面上波阵面的变态。除了底空间(在此

情形下为平面)之外，我们也考虑时空(在目前情形下为三维空间)。波阵面在平面上传播，在时空里就扫出一个曲面。结果是，这个曲面自身也总可以看作为时空里的波阵面(大波阵面)。在一般状况的情形下，大波阵面的奇点可以是燕尾、尖脊和以一与等时面(isochrones)——由时空里“同时”的点组成——有关的一般状况方式位于时空里的自相交曲线。现在，容易看出在一般状况的情形下，平面上瞬间的波阵面可能发生哪些变态：它们就是那些在大波阵面的等时横截面的形式下发生的变化。

同样地，对在三维空间中传播的波阵面的变态进行研究，导致了用三维等时面对四维时空中大(三维的)波阵面的横截面进行研究。所出现的变态都绘在图 32 中。

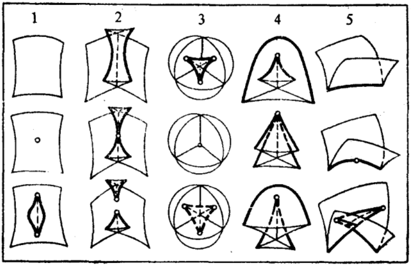


图 32

对波阵面的变态进行研究，只是导致产生突变理论的许多问题中的一个；然而，即使在三维空间的情形下，突变理论专家们也未能处理这个问题；只是基于晶体的对称群的理论，在奇点理论中引入了新的方法，才于 1974 年得到图 32。

同波阵面一样，射线系统也可用来描述扰动的传播。例如，用椭圆的内法线族，就可描述扰动在椭圆内的传播(图 33)。这个内法线族有一个包络。射线族的包络称为焦散线(即它是"灼亮的"，因为光聚焦在其上)。当太阳光照射在茶杯上时，在茶杯的内曲面上可清晰地看到一个焦散面。天空中的彩虹，也就是由于射线系统经过水滴而得到完全的内反射之后所形成的焦散面(图 34)。

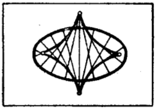


图 33

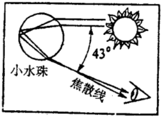


图 34

椭圆型波阵面的焦散线有四个尖点，而且这些奇点都是稳定的，因为邻近的波阵面的焦散线具有相同的奇点。在小扰动之下，焦散线的所有更复杂的奇点都将分解成为一些标准奇点——尖点(局部地由$x^2=y^3$给出)和自相交曲线。

三维空间中任何曲面的法线系统也都有焦散面。这种焦散面可由在每一条法线上标出曲率半径的方法来构造。一般说来，一个曲面在每一点都有二个不同的曲率半径，因此每条法线就有两个焦散点。

即便是描绘最简单的曲面——例如，三维空间中的椭球面——的焦散面，也非易事。

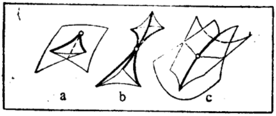


图 35

三维空间中一般状况的焦散面只有标准奇点。这些奇点称为"燕尾"、"金字塔"("椭圆型脐点")和"钱包"("双

曲型脐点”)，如图35 所示。

金字塔有三条在顶点相切的尖脊；钱包有一条尖脊，而且钱包是由两个相交于两条线的对称船形弓组成的。这些奇点都是稳定的。

在小扰动之下，三维空间中焦散面的所有更复杂的奇点都将分解成为这些标准奇点。

对于一初始波阵面——例如平面上的一个椭圆，我们来考虑其焦散线和扰动在传播中的波阵面。不难看出，传播中的波阵面的奇点沿着焦散线滑动，最终将充满整个焦散线。

例如，图 32 中波阵面 5 的变态就对应于焦散面上的一个燕尾。波阵面的尖脊在三维空间中运动，就扫出了焦散面的曲面(燕尾)。不过，焦散面这样分解成曲线，与我们早先见到的燕尾曲面分解成平面曲线不同(图 31)，因为运动着的波阵面的尖脊没有自相交曲线。运动着的波阵面的尖脊二次通过焦散面的自相交线上的每一点，两次通过之间的时间间隔非常小(阶为 $\varepsilon^{5/2}$，其中 ε 为从燕尾顶点算起的距离)。

完全相同地，在图 32 的变态 3 和变态 4 中，运动着的波阵面的尖脊扫出了金字塔和钱包。

如果原来那个波阵面在参数的控制之下运动，那么它的焦散

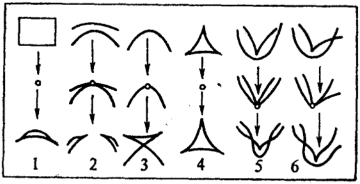


图 36

线也运动，并且在这个运动的过程中可能发生变态。正如我们对波阵面所做的那样，可以用考虑时空中某个大焦散面的横截线的方法，来达到研究在平面上运动的焦散线的变态之目的。所得到的变态都绘在图 36 中(这些都是燕尾、钱包和金字塔等的平面截线的变态)。在单参数族的小扰动之下,所有更复杂的变态都将分解成为一连串的上述变态。

我们把注意力转向表示“从无到有的”焦散面的形成过程的变态1。新形成的焦散面形如一尾端都为半立方尖点的镰刀〔用汤姆的术语的话,称为“唇”(lips)〕。与此类似,当投影的方向变化时,曲面的可见轮廓也可能是“从无到有的”(图37)。如从正上方往下看一小山,我们就见不到轮廓。当视线倾斜时,起初只会出现一个奇点,随后迅速增多(与$\sqrt{t-t_0}$成比例，其中 t_0 为出现奇点的那个时刻),进而形成为“唇”。这里所描述的变态，可以看作是尖脊曲面的平面截线当平面平移时发生的变态(在形式发生变化的那一刻，平面与尖脊相切如图 38)。

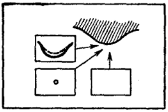


图 37

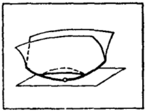


图 38

在可见轮廓上也可见到变态 3 —— 人们只需细察从身旁走过去的一头双峰骆驼(图 39)，在发生变态的那一刻，其剖面具有与曲线 $y^3=x^4$ 相同的奇点。



图 39

一般状况单参数族中曲面的可见轮廓的全部变态，都由绘在

图 36 中的前三个图解 1—3 给出。

在三维空间中运动的焦散面的变态，借助于四维时空中大(三维)焦散面的横截面，可由三维的等时面得到。这些变态都绘在图 40 和 41 中。

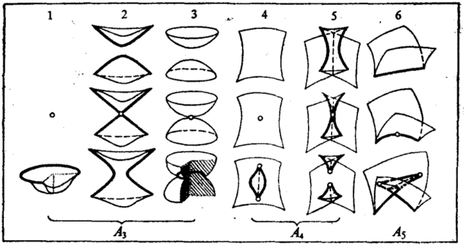


图 40

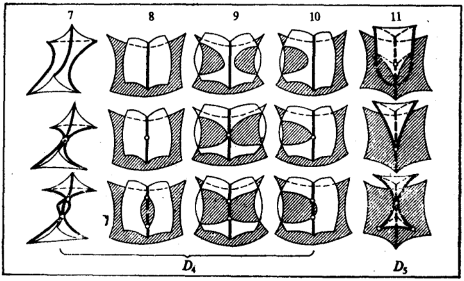


图 41

这些变态中的(1)描述了“从无到有的”新焦散面的形成过程。我们看到,新形成的焦散面很像一陡边茶碟。在形成为茶碟状之后的时刻 t,长度和宽度的阶都为 $\sqrt{t}$,深度的阶为 t,厚度的阶为 $\sqrt{t}$。

当一束光通过扩散媒介(灰尘,烟雾)时,就可见到焦散面。扎卡留金推测,有些观察者可能把这类焦散面说成是“飞碟”了。

焦散面的尖脊在三维空间中运动,就扫出了双重焦散(bicaustic)曲面。与图 40 和 41 中各种变态相对应的一般状况双重焦散面的奇点,都绘在图 42 中。

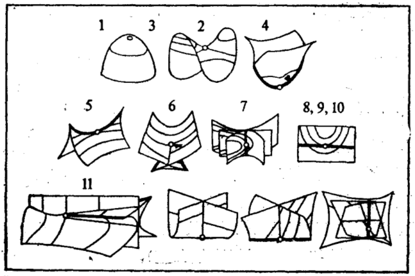


图 42

众所周知,射线只是波(比如光)传播的初步的近似描述;为了找到波传播的更精确的描述,必须引入一个新的基本参数——波长(只有当与系统的特征几何维数相比波长很小时,射线描述才是满意的描述)。

光的强度在焦散面附近很高,而在其奇点附近仍然很高。强度的扩大系数与 $\lambda^{-\alpha}$ 成比例,其中 λ 为波长,指数 α 是一个依据奇点

的类型而定的有理数。对于最简单的奇点来说，α 的值如下：

焦散面	尖脊	燕尾	金字塔	钱包
1/6	1/4	3/10	1/3	1/3

因此，照得最亮的点是金字塔型奇点和钱包型奇点。就运动的焦散面而言，可能在一些孤立的瞬间有节奏地出现甚至更亮的 A_5 型奇点和 $D_5$① 型奇点（见图 40 和 41；对于 A_5 来说，$\alpha=1/3$，而对于 D_5 来说，$\alpha=3/8$）。

如若光足够强，以致它可以摧毁媒介，则摧毁将从最亮的点开始。因此，指数 α 决定了出现摧毁这种现象的光强是怎样依赖于光的频率的。

扎卡留金将上面叙述的焦散面和波阵面的奇点的分类，类似地搬到多维直至十维空间中去了。

由焦散面、波阵面以及它们的变态的几何的奇点理论做出的预测，在实验中得到了完全证实。现在看来奇怪的是，为什么两个世纪以前没有建立起这个理论。然而，事实是所需的数学工具并不简单②，而与单李代数的分类、科克希契(Coxeter)的晶体群的分类、辫群的理论以及依赖于参数的积分的多值 (ramification) 理论，等等这样广泛的数学领域有关，甚至还以相当神秘的方式与三维欧氏空间中正多边体的分类相联系着。

突变理论专家们力图避开深奥的数学。例如，齐曼在 1980 年开列的关于突变理论的庞大的文献目录中，就略去了 1976 年以来发表的大多数数学论文。因此，突变理论专家们继续尝试用实验

① 上面列举的所有奇点都分属 A_k 和 D_k 两族，有关这两族的更详细的内容可在第十六章中找到。

② 本书最开始所述惠特尼定理的原始证明，大约有四十页纸长；虽然人们能够很容易地理解并运用奇点理论的最新几何结果来重新证明它，但是这些证明仍然很复杂。

寻找那些已被数学家们解决了的问题的答案。例如，1980 年发表了一篇关于风场和冰的运动的论文，其中成功地猜出了三维空间里焦散面的变态的表(见图 40 和 41)中的一半变态，而这个表数学家们早在 1976 年就已得到了。

第九章　宇宙中物质的大范围分布

当今宇宙中物质的分布很不均匀——有行星、太阳、恒星、银河系、银河系团等等。天体物理学家们现在认为，在宇宙发展的早期阶段并不存在这种不均匀性。那么，这种不均匀性又是怎样形成的呢？泽利多维奇在1970年提出了尘状物质星团的形成的一种解释。这种解释在数学上等价于焦散面的奇点形成的分析。

我们考虑一种相互不影响的介质，即这种介质如此稀疏，以致其一个粒子"通过"其另一个粒子时它们不会碰撞。为简单起见，我们假设粒子不相互影响并且是在惯性的作用下运动：在时间 t 内，粒子从点 x 出发到达点 $x+vt$。

我们假设在初始时刻，粒子在点 x 的速度是 $v_0(x)$；向量场 v_0 称为此介质的**初始速度场**。随着时间的推移，粒子的运动，介质的初始速度场发生了变化（尽管每个粒子的速度并不会变，但是在每一接下来的时刻，这个粒子将会在新的位置上）。

我们在图43中绘的是均匀介质的初始速度场 v_0，以及在时

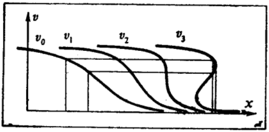


图 43

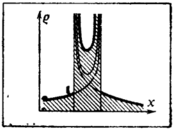


图 44

刻 $t=1、2、3$ 之后从 v_0 得到的速度场 $v_1、v_2、v_3$。我们看到，从某一

个时刻起，较快的粒子开始把较慢的粒子抛在后面，结果使得速度变场成三个值的了：三个粒子流以不同的速度通过空间的一点。

这种介质的运动可以描述为直线到直线上的映射的单参数族。这也就是说，对于每个 t，都存在一个映射 g_t，把每个粒子的初始位置 (x) 送到最终位置 $g_t(x)=x+v_0(x)t$。

映射 g_0 为恒等映射，就是把每个点映到自身的变换。对于靠近 0 的 t，映射 g_t 是一对一的，因而没有奇点。但经过首次赶超之后，g_t 就有了两个折迭。

假设起初介质在点 x 的密度为 $p_0(x)$。密度是随时间变化的。不难看出，经过赶超之后，密度函数的图形将有图 44 所示的形状（在与折迭点相距 ε 的点处，密度的阶为 $1/\sqrt{\varepsilon}$）。

因此，经历了足够长的时间之后，初始速度场中速度值的微小偏差异导致了粒子聚集（在那些密度无穷大的地方）的形成。

当从一维介质过渡到充满一个任意维的空间的介质时，如果考虑了外部力场或者源于介质的场对粒子运动的作用，而且也考虑了相对论效应和宇宙膨胀的话，那么上述结论依然成立。

如果此力场是一个势场，即沿任何道路运动所做的功仅与该道路的起点和终点有关，并且初始速度场也是一个势场，那么描述映射 g_t 的奇点及其在 t 的变化之下的变态的问题，在数学上就相当于描述焦散线的奇点及其变态的问题。这两者均系所谓拉格朗日奇点理论的研究课题。

在二维介质的情形中，密度无穷大的点形成平面上的一些曲线。这些曲线是由映射 g_t 的临界值——即在临界点上的值——形成的。对于图 1 中的映射来说，临界点就是球面的赤道上的那些点，而临界值就是水平面上可见轮廓的那些点。

映射 g_t 的临界值形成的曲线称为它的焦散线。它也可用与通常的光学焦散线相同的方式，定义为两条无限靠近的射线（粒子轨

线）的交点组成的集合。

同样，对光学焦散线的变态所做的描述，可以搬来描述在势能作用下运动的粒子团（介质的密度为无限大的点）的变态。

平面上最先出现的奇点，看起来像一个其顶端处为半立方线的尖角的镰刀（三维空间中新生成的焦散面形如一茶碟）。泽利多维奇把如此焦散面称为**发面煎饼**①（俄文原文为 блин；它起初被解释为银河系，后来被解释为银河系团）。

随着介质继续的运动，还会产生新的发面煎饼。此外，原有的发面煎饼又开始变化，而且可能会彼此影响。图 45 中绘的是二维介质中事件的一个典型序列。

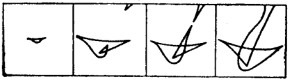


图 45

图 40 和图 41 中绘的是三维介质中所有可能的基本变态（得到这些结果，需要用到复杂的拉格朗日奇点的数学理论）。

由于这些变态，密度函数在这些发面煎饼的曲面上，沿着一些曲线，在一些孤立的点上，具有一些阶不相同的奇点。我们将用所考虑的点的一个 ε 邻域上的**平均密度**——即该 ε 邻域内的质量与该邻域的体积的比值，来刻划一个奇点。

当邻域的半径 ε 趋于零时，焦散面的点上的平均密度就趋于无穷大。

焦散面的各种点上的平均密度量的阶如下：

焦散面	尖脊	燕尾	钱包，金字塔
$\varepsilon^{-1/2}$	$\varepsilon^{-/32}$	$\varepsilon^{-3/4}$	ε^{-1}

① 一种俄罗斯特有的煎饼。——中译者

随着时间的变化，在一些孤立的时刻可能出现（平均密度的阶为$\varepsilon^{-4/5}$的）奇点A_5和（平均密度的阶为$\varepsilon^{-1}\ln^{1}/\varepsilon$的）奇点$D_5$。

天体物理学家们的结论是，在宇宙的半径比现在的要小一千倍的那个时候，宇宙中物质的大范围分布几乎是均匀的，并且速度场也几乎是势场。随后发生的粒子运动导致了焦散面——即密度函数的奇点和粒子团——的形成。直至发面煎饼的形成，密度仍旧很小，可以认为介质的粒子相互之间是不影响的。在此之后，如果假设宇宙的大部分质量是集聚在承受质量的中微子上，那么仍然可以认为介质的粒子之间是相互不影响的；然而，如果大部分质量是聚在质子和中子上，那么从焦散面的几何及其变态进行推演，在处理上就必须小心谨慎一些，这是因为在这种情况下介质的粒子不再是互不影响的了。

看来，关于物质在曲面上的聚集与沿某些线（引线）发生的最初聚集，在一些特殊的点（结点）上相遇的结论，是与天文观测的结果相符的，至少大体上是这样（尚达林）。

第十章　最优化问题中的奇点：极大值函数

许多奇点、分歧和突变（跳跃）产生于各种各样的寻找极值（极大值和极小值）的问题——最优化、控制论和决策论等中的问题——之中。例如，假设我们需要找 x，使得函数 $f(x)$ 的值为极大（图46）。在此函数的光滑改变之下，其最优解将发生跳跃性的变化，从一对互相竞争着的极大值中的一个（A）变到另一个（B）。

下面我们将考虑几个这种类型的问题。这些问题，尽管在某些情形下，已经得到了奇点的恰当分类，但离完全解决仍相距甚远。

我们考虑以 x 为变量，y 为参数的函数族 $f(x,y)$。对于 y 的每一个固定的值，我们来计算这个函数的极大值，将其记为

$$F(y) = \max_{x} f(x,y).$$

函数 F 连续但不一定光滑，即便 f 是多项式，也不例外。

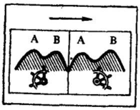


图 46

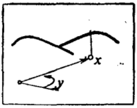


图 47

例 1. 设 y 为视线的方位角，x 为距离，f 为在方位角的方向 y 上距离为 x 处景物的用角度量的高度（图 47）。则 F 确定的是这个景物的轮廓线。很清楚，光滑曲面的轮廓线也可能有弯折，而且小

扰动还消不掉这些弯折。

变量 x 和参数 y 可为任意维空间中的点；除了极大值函数以外，我们还可见到极小值函数。

例 2. 设 x 为平面曲线 γ 上的一点，y 为曲线 γ 所围的区域中的一点，$f(x,y)$ 是从 y 到 x 的距离。

我们将把 f 看作是以曲线 γ 所围区域的点 y 为参数，曲线 γ 的点 x 的函数。那么，$f(x,y)$ 的极小值函数 $F(y)$ 就是从点 y 到曲线 γ 的最短距离（图 48）。很明显，这个函数是连续的但非处处光滑。

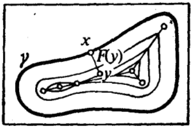


图 48

我们可以想象有这样一把铲子，它的边缘为曲线 γ；我们在这把铲子上垒一堆尽可能大的干沙堆。那么，这个干沙堆的曲面就是函数 F 的图形。显而易见，对于一般状况的铲子来说，这种干沙堆的曲面上有一条脊线（弯折线）。

函数 F 的等高线束不是别的，恰好就是扰动在曲线 γ 内传播的波阵面。

奇点理论使得我们不仅仅能够列举本例中极大值函数 F 的奇点，而且还可以列举有任意多个变量的函数的一般状况族的奇点，只要参数 y 的个数不大于 10（布雷兹加洛瓦）。下面，我们来考虑最简单的只有一个参数的情形和二个参数的情形。

在 y 参数轴（或平面）上选取适当的坐标，并且在从 F 减去参数的一个适当的光滑函数之后，我们就能够在每个点的邻域内，化一般状况族的极大值函数为下列标准型之一：

一个参数的情形：$F(y)=|y|$；

$$\text{二个参数的情形：} F(y)=\begin{cases}|y_1|\text{或}\\ max(y_1,y_2,y_1+y_2)\text{或}\\ \max\limits_x(-x^4+y_1x^2+y_2x).\end{cases}$$

特别的是，一个参数情形的公式表明，一般状况的光滑景物的轮廓线的奇点不外乎就是最简单的弯折。由两个参数情形的公式所描述的极大值函数，具有极小值函数的下述奇点（例如，铲子上沙堆的曲面的奇点）：脊线、三条脊线的交会点以及脊线的尾端（见图 48）。

在后一种情形下，去掉燕尾（见图 30）的与尖脊相联的金字塔（*BCB*）后所得的那部分曲面（关于水平面反射所形成的），就是极小值函数的图形。

至于三个、四个、五个和六个参数的情形，不同类型奇点的个数分别为五、八、十二和十七。但从七个参数开始，不等价奇点类型的个数却变成了无限多：这些函数的标准型都必然包含“模数”(moduli)，模数就是附加连续的一些参数的函数。

马托夫证明了，从拓扑学的角度来说，光滑函数的一般状况族的极大值（极小值）函数，与参数空间上的一般状况的光滑函数有相同的局部结构。

第十一章　可达边界的奇点

相空间中的控制系统(controlled system)的定义如下：它不像通常的发展系统那样，在相空间的每一点上仅有一个速度向量，而是有整整一个集合的向量，这个集合叫做可允许速度的指标场(indicatrix)。

控制问题就是要在每一时刻，从指标场中选出一个速度向量，以到达给定的目标——例如在可能最短的时间内到达相空间的某个子集。

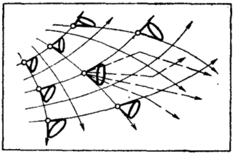


图 49

到达目标的最短时间对初始点的依赖关系可能有奇点。第十章中考虑的到一条曲线的距离的极小值函数的奇点，只是一种特殊情形。在那里，指标场是一个圆，目标是那条曲线。和此特殊情形完全不同，对一般控制问题中最短时间的奇点还研究得很少。

在一般情形中，在所有初始条件下想要到达目标也许是不可能的。相空间中那些可到达目标的点(在任一时间内到达即可)组成的集合称为可达区域(domain of attainability)。

可达区域的边界可能有奇点，甚至在不仅目标无奇点而且指标场在相空间的各个点上也无奇点的情形下，它也还是可能有奇点。下面我们将叙述是由达维多夫给出的，当指标场和目标都是光滑曲线时，相平面上一般状况控制系统中可达边界奇点的分类。

共有四种类型的边界奇点，其中三类在相平面上适当选择的局部坐标下，由下述简单的公式给出：

1) $y=|x|$，

2) $y=x|x|$，

3) $y=x^2|x|$。

第四种类型边界奇点的标准型包含一个有两个变量 x、y 和三个参数 a、b、$\alpha>1$的任意光滑函数B：

$$4)\quad \begin{cases} a(x-\sqrt{y})^{\alpha}=\dfrac{x}{a}+yB\sqrt{y},\ x\geqslant 0; \\ b(|x|-\sqrt{y})^{\alpha}=\dfrac{x}{a}+yB+\sqrt{y},\ x<0. \end{cases}$$

图 50、51 和 52 中画的是几个可达边界具有上述类型的奇点的控制系统和目标的例子。在这些图中，目标 γ 用双重线标记，可达边界用 T 字线标出，——字母 T 的脚指向可达区域。带箭头的曲线在每个点上与可允许方向组成的圆锥的边缘相切：用水平线标出的阴影区域就是“可完全控制”的区域(指标场的凸包把○围在里面)。仔细察看图 50 至 52，读者就会得出上述四类奇点是不可消去的结论。

为了有助于读者理解这些图，我们将构造一个如下定义的**极限曲线**(limiting curve)网：

在可完全控制区域外的每一点上，可允许速度的方向都位于一个小于 180°的角内。

这个角的边确定在给定点上**极限速度**的方向。因此，在可完全控制区域外的每个点上有两个极限方向。极限方向场的积分曲线——即在其每个点上都有极限方向的曲线——称为**极限曲线**。

极限曲线网连同可允许速度的指标场(形如椭圆)，以及在此指标场的基础上由运动的可允许方向形成的角，都绘在图 49 中。

可达区域的边界由一段一段的极限曲线，以及可能有的不在可完全控制区域内的一段一段的目标曲线(参看图 50)组成。这些线段在某些点上相互连接起来了，正是这些连接点构成可达区域边界的奇点。

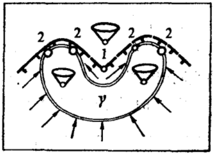


图 50

在图 50 中，目标的脊背的轮廓形似字母 C。在此相平面的所有点上，可允许速度的值都相等，并且它们的方向向上，与垂直轴的交角不超过 45°。

所有极限曲线的倾斜度都为 ±45°。可达边界用 T 字线标出。显而易见，此可达边界上的奇点共有两类 1 和 2。

两条不同的极限曲线的线段在点 1 上相交，并且它们的交角不为零。很清楚，在图 50 中从位于可达边界上方的点出发，在与垂直轴成不超过 45° 角的方向上运动，要到达目标是不可能的，而从位于可达边界下方的点出发，要到达目标是可能的。有趣的是，可以看到可达区域在顶点 1 上开了一道口子：不可达区域以楔形从这一点插入可达区域。因此，第七章意义下的好区域原来恰好就是不可达区域。

一段极限曲线和一段目标曲线在可达边界的点 2 上相交。在这种点上，目标曲线的方向与极限曲线的方向相吻合，于是可达边界就有切线。不过，在点 2 上，当从极限曲线过渡到目标曲线时，可达边界的曲率将会发生跳跃。

现在，我们将图 50 中的目标代之以任意一条邻近的光滑曲线(说两条曲线是邻近的，是指它们的切线靠得很近并且它们的曲率也相差不大等等)，并且我们还将图 50 中的可允许速度的指标场代之以一个邻近的场。那么很显然，同以前一样，这个新系统的可

达边界在点 1 的附近仍旧有一个弯折点，在这点上两条极限曲线段相交于一个非零角。完全类似地，这个新系统在每个点 2 的附近都将拥有一个特征相似的点。

因此，图 50 中所绘的情形在系统的小扰动之下是稳定的。图 51 和 52 中所绘的情形也具有类似的稳定性。现将那些导致极限曲线网出现这些图中所示的奇点的情形陈述如下：

在图 51 中，曲线 K 是阴影的可完全控制区域的边界：在阴影区域内沿任何方向运动都是可能的（如果准许使用所谓的混合策略——即时刻改变方向的运动——的话）。图 51 中的目标落在可完全控制区域内。所以，以曲线 K 为边界的整个区域是可达区域。

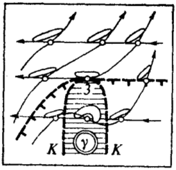


图 51

在可完全控制区域的边界 K 上，可允许方向所对的角正好为180°。边 K 由平面上的那些点组成，在这些点上凸化可允许速度的指标场的双重切线（双重切线就是与曲线相切于两点的直线）通过速度平面的原点。

在图 51 中，这种双重切线在曲线 K 的每个点上都是水平的。导致形成图 51 中所示的奇点的情形，就是这里的曲线 K 自身与可允许速度的指标场的过零点的双重切线相切。

对于一般状况的系统来说，这种情形只可能出现在可完全控制区域的边界 K 的孤立点上。在图 51 中，这种情形出现在 K 的切线是水平线的点 3 上。

上面所述清楚地说明了，所描述的情形可以稳定的方式来实现：在系统——即目标和指标场——的小扰动之下，点 3 将会稍许挪动一下，但不会消失。

我们现在来考虑点 3 附近的极限曲线网。点 3 附近的两个极限方向场都是光滑的。我们选取适当坐标系，可以把其中一个场的曲线都扳成直线。在图 51 中就是选择了一个这样的坐标系，使得两族极限曲线中的第一族是由(指向左边的)水平线组成的。

第二族中的曲线都是光滑曲线。它们沿 K 与第一族的直线相切。在交点 3 上，这两族曲线都与曲线 K 相切。现在从这些事实就不难看出，点 3 附近的极限曲线网看来正如图 51 所示的那样：在曲线 K 的上方，当在允许的方向上运动时，第二族中的曲线上升，而在 K 的下方，第二族中的曲线下降(极限曲线网中曲线方向的选取，容许有少数几个与所画的那个类似的更进一步变形；理解了图 51 的读者自己可以很容易地把它们找出来)。

在图 51 中显见，在点 3 的左边，紧挨着可达边界的是第二族极限方向的一条曲线，而在点 3 的右边，紧挨着可达边界的是第一族(水平的)极限方向的一条直线。在点 3 上，这两条曲线都是二阶相切的(一条是直线，另一条是立方抛物线)。在这个点的一个邻域内，可达边界与曲线 $y=x^2|x|$ 微分同胚①。

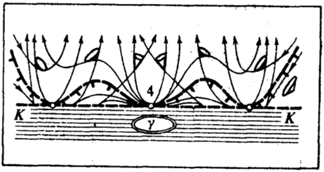


图 52

因此，图 50 中的点 1 和 2 以及图 51 中的点 3，都是稳定地实现了在可达区域的边界上出现第 46 页上三种简单类型的奇点的情形的例子。第四种类型的奇点出现在图 52 所示的情形中。

在这个图中，就像在图 51 中那样，目标位于阴影的可完全控

① 微分同胚就是不仅其自身是光滑的而且其逆也是光滑的坐标变换。

制区域内。相平面的那些其上的凸指标场过零点的点位于这个区域的边界 K 上。显然在一般状况的控制系统中，这种现象——指标场过零点——出现在一条曲线上。在这条曲线 K 的一边是可完全控制区域(指标场把零点围在里面)，而在这条曲线 K 的另一边则是有两个极限方向的区域。在分隔这两个区域的边界 K 上，这两个方向场融为了一体——方向场在零点与指标场相切。

在 K 的一般状况的点上，这个场的方向与 K 的交角不为零。导致可达区域的边界上出现第四种类型的奇点的情形，是曲线 K 与极限方向相切。在一般状况的系统中，这种情形只可能出现在可完全控制区域的边界 K 的孤立点上。在图 52 中的曲线 K 上共有三个这样的点；处在中间的那一点用数字 4 标明。

把我们这里的极限方向的双值场，看成是曲线 K 上方的区域的双叶覆盖曲面上方向的单值场，对于研究在这些奇异点的邻域内的极限曲线网，是大有裨益的。

最后，我们来考虑平面上直线的所有方向组成的集合。这个集合是一个三维流形，因为一个方向是由一个隶属于该直线的点(两个坐标)和其方位角(一个角坐标)确定的。

所有极限方向组成的集合是所有方向组成的集合的子集。这个子集是所有方向组成的三维流形中的一个光滑曲面。把这个所有方向组成的三维流形投影到原来那个平面上(每条直线投影到一隶属于它的点上)。在这个投射之下，由极限方向组成的曲面映到平面的位于曲线 K 上方的那一部分上。该曲面到平面上的这个投射，在曲线 K 上有奇点，就是惠特尼折迭。

恰恰除开我们想研究的、其上指标场在零点与 K 相切的那些奇点，平面上极限方向的双值场在所构造的曲面的每一点上确定了方向的一个单值场。

在转移到所构造的曲面上来之后，两个极限方向场的极限

曲线，形成一个在我们感兴趣的点上有奇点的光滑向量场的相曲线组成的系统。这些奇异点可以是结点、焦点或者鞍点，在图 52 中，中间那个点就是结点，边上两个点都是鞍点。因此，利用惠特尼折迭映射，原来那个平面上极限曲线的分布，可从奇异点的邻域内向量场的相曲线的分布得到。虽说这个惠特尼映射与相曲线并非毫不相干〔特别是，在K的上方相曲线与此投射的核(kernels)相切〕，但是对于研究奇异点附近的极限曲线的排列来说，上面所述的就足够了。顺便说一句，相同的情形也可由曲面上抛物线附近的渐近线给出。

图 52 中绘的是这个情形的种种变化之一种。显然在此图中，T 字可达边界，由鞍点——边上的奇异点——的分界线 (separatrix)在两叶覆盖曲面到平面上的映射下的投影形成。在点4上方的覆盖上有一个"结点"型的奇异点。鞍点的两条分界线从不同的方向汇入这个结点。

这两条曲线在此结点有公共切线，而且在一般状况的情形下，选取适当的坐标系，它们就可由下述形式的次为 $\alpha>1$ 的抛物线方程表示：

$$y=A|x|^{\alpha} \quad \text{当 } x\leqslant 0 \text{ 时},$$
$$y=B|x|^{\alpha} \quad \text{当 } x>0 \text{ 时}.$$

可达边界的第四种类型的奇点，可由惠特尼折迭映射——它的微分的核与这对抛物线相切，从此覆盖曲面上的这一对次为 α 的抛物线方程得到。一般状况地，这种折叠结点(鞍点、焦点)的相图(即分解成相曲线)，像原来那个(非折叠)相图一样，以基本的方式(在微分同胚的意义下)仅依赖于一个连续的参数(或者如我们所说的那样，它只有一个模数)。这是达维多夫新近得到的关于隐式微分方程的标准型或说关于有两个慢变量 (slow variable) 的松弛振荡的一个结果。

顺带说一说，这个情况表明，突变理论专家们对汤姆的一句话“人们实际上只会遇到稳定的现象。因此，在任何问题中，人们都可把非稳定的情形认为是实际上不存在的而将其抛在一边，不予理会，仅须研究稳定的情形”所作的庸俗的解释，是错误的。但是，这种解释在突变理论专家们当中却广为流传着。在目前的情形中，前三类奇点是稳定的（关于在微分同胚意义之下的等价类），但第四类奇点却是非稳定的。然而，人们遇见所有这四类奇点的概率都相等，因此，最后一类奇点的研究，与其它三类奇点的研究具有同等的重要性。

令人吃惊的是，关于相空间是高维空间的一般状况控制系统中可达区域和时间函数等的奇点，以及最佳策略，所知甚少。——直到1982年达维多夫才仅证明可达区域是带利普希茨边界的拓扑流形。

在控制系统的研究中，一个间接的问题是，关于曲线和曲面等等光滑流形的凸包的奇点的问题。

一个集合的凸包就是所有包含这个集合的半空间的交。控制系统中的指标场不一定是凸的。

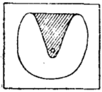


图 53

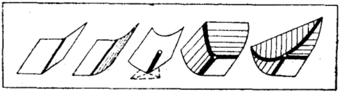


图 54

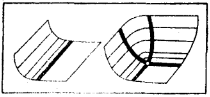


图 55

不过，可以证明非凸指标场可以用它的凸包来替代。

例如，在有风的水面上行驶的快艇的速度指标场就不是凸的（图 53）。然而，改变航向，使用混

合策略，即交替地以指标场的不同速度航行，想顶风而行是可以办到的。在混合策略之下运动的平均速度属于所使用的指标场的向量的算术平均的集合，即属于该指标场的凸包。

谢迪赫和扎卡留金对三维空间中一般状况的曲线和曲面的凸包的奇点进行了研究。在相差一个变量的光滑变换下，曲线的凸包在其的每个点的邻域内就由下述六个公式之一给出：

$$z\geqslant 0, z\geqslant |x|, z\geqslant x|x|,$$

$$z\geqslant \min(u^4+xu^2+yu), z\geqslant \min^2(x,y,0),$$

$$\{z\geqslant \min^2(x,y,0), x+y\geqslant 0\}$$

(图 54)。曲面的凸包由下述三个公式之一给出：

$$z\geqslant 0, z\geqslant x|x|, z\geqslant \rho^2(x,y),$$

这里 $\rho(x,y)$ 是点 (x,y) 到角 $y\geqslant C|x|$ 的距离(图 55)。数 $C>0$ 是一个模（不变量）：光滑变换不能把对应于不同 C 的凸包从一个变到另一个。

对更高维空间中的凸包的奇点研究得很少。根据谢迪赫的结果，在维数大于 $k+2$ 的空间中，一般状况的 k 维流形的凸包有都是 k 个变量的函数的模数。

在带约束的最优化问题中，例如在越过障碍的问题中，出现了许多新的、有趣的奇点。对它们进行研究，导致在数学的最经典的领域之一——三维空间中光滑曲面的几何——中出现了新的结果。

第十二章　光滑曲面及其投影

平面上的光滑曲线可以有与它相切于任意多个点的切线（图56），但对一般状况的曲线来说，却不可能有这样的切线。因为一般状况曲线的小扰动总可以使任意一条直线最多与它相切于二点。

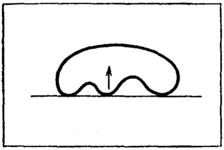


图 56

那么，一条直线又可以与一般状况的曲面在多少个点上相切呢？经过深思或者通过做实验，读者将确信最多只能有四个切点；人们可以在保持有三个切点的条件下移动一条直线，而在保持有二个切点的条件下，人们可以沿两个方向移动一条直线。

一条直线与曲线或者曲面的切触阶(order of tangency)也是可以变的，例如 x 轴与 $y=x^2$ 的图形的切触阶为一，与 $y=x^3$ 的图形的切触阶为二，等等。一般状况的平面曲线不会有切触阶大于2的切线，切触阶为二的切线出现在这种曲线的孤立点上，我们把这种孤立点称为拐点。

对于空间中的曲面来说，事情就没有这么简单了。在曲面不凸(或凹)的近旁的点上有高于第一阶的切线，称之为渐近切线。对于一般状况的曲面，沿某些曲线可能有第三阶的切线，在孤立点上可能有第四阶的切线；不存在阶大于四的一般状况曲面的切线。

一般状况曲面上的所有点，根据其上切线的阶的大小，可以分为下面七类(图 57)：

1）椭圆点的区域（其上所有切线的阶都为1）；

2）双曲点的区域（两条渐近切线）。

这两个区域有一个公共的边界：

3）抛物点的曲线（一条渐近切线）。

在双曲性的区域内有一条特殊的曲线：

4）渐近线的拐点组成的曲线（在这里有第三阶的切线）。

最后，在这条曲线上又可挑出一些更特殊的孤立点，分为三类：

5）双重拐点（其上有第四阶的切线）；

6）两条渐近线的拐点（两条第三阶的切线）；

7）曲线3）和4）的交点。

对于一般状况的曲面，拐点组成的曲线的两个分支在6）类的点上相交于一个非零角，而曲线3）和4）在7）类的点上（第一阶）相切。

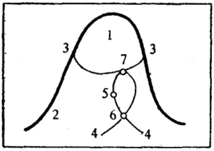


图 57

这个由普拉托诺瓦和朗吉斯给出的曲面上点的分类，以下述方式与波阵面奇点的分类联系起来了。

数学家们把具有随便什么特性的对象都看成是点。例如，我们来考虑(x,y)平面上所有不与x轴垂直相交的直线组成的集合。

这样的直线都由$y=ax+b$形式的方程给出。所以，一条这样的直线就由一个数对(a,b)确定，因而可以把它看作是坐标为(a,b)的平面上的一个点。这个平面被称为原来那个平面的对偶平面，它的点就是原来那个平面的直线。

在原来那个平面上给定一条光滑曲线，那么在这条曲线的每一个点上都有一条切线。当点沿这条曲线运动时，切线发生变化，

因而切线在对偶平面上的对应点也运动。因此，在对偶平面上我们得到了一条曲线——原来那条曲线的所有切线的集合。这条曲线被称为原来那条曲线的对偶曲线。

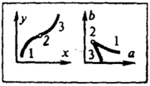


图 58

如果原来那条曲线是光滑的凸曲线，那么它的对偶曲线也是光滑的，而且如果原来那条曲线有一个拐点，那么在其对偶曲线上就相应地有一个尖点(图58)。

一般状况光滑曲线的对偶曲线，与平面上一般状况的波阵面有相同的奇点。因此，在原来那条曲线的一般状况光滑形变之下，其对偶曲线所经历的变态，与平面上一般状况的波阵面在一般状况的传播中所发生的变态相同。

完全类似地，三维空间中的所有平面形成对偶的三维空间，并且光滑曲面的所有切平面形成对偶曲面。一般状况曲面的对偶曲面的奇点，与一般状况的波阵面的奇点相同，即为尖脊和燕尾。

原来那个曲面上抛物点组成的曲线对应于其对偶曲面上的尖脊。这条曲线上的特殊点——这条曲线在这些点上与渐近线的拐点组成的曲线相切——对应于燕尾。燕尾的自相交曲线由与原来那个曲面双重相切的平面组成。所以，在7)类的点上，平面与原来那个曲面的两个切点合为了一点，这意味着与原来那个曲面双重相切的平面的单参数族终止于7)类的点。

一般状况曲面上的各类点也以可见轮廓上的各种奇点的形式出现。如果投影的方向是一般状况的，那么由惠特尼定理可知，仅有的奇点是折迭和尖点。但是，如果人们以特殊的方式选择投影方向，就可能得到一般状况曲面的某些非一般状况的投影。可以证明，所有这样的投影局部都可简化为下述九个曲面 $z=f(x,y)$ 中的一个沿 x 轴的投影：

类型	1	2	3，4	5	6	7	8,9
f	x^2	x^3+xy	$x^3 \pm xy^2$	x^3+xy^3	x^4+xy	$x^4+x^2y+xy^2$	$x^5+x^3y \pm xy$

这些曲面都是投影到平面(y,z)上的，并且简化是用形如$(X(x,y,z),Y(y,z),Z(y,z))$的坐标变换来实现的。

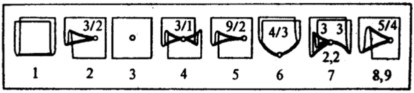


图 59

与这些投影对应的可见轮廓都绘在图 59 中。

投影的分类与曲面上点的分类之间的对应关系如下。类型 1 是沿非渐近方向的投影（惠特尼折迭）。

沿双曲区域的一般状况点上的渐近方向的投影属于类型2。这类投影上有惠特尼尖点型奇点。投影方向的一个小扰动只能将这个奇点在投影曲面上稍许挪动一下：新方向在邻近的点上变成渐近的了。因此，为了观察尖点，人们只要沿渐近方向观察一般状况的曲面即可。

随着曲面或者观察者的运动，在一些孤立的时刻将会出现奇点 3、4 和 6。

投影 6（和 8 或 9）对应于双曲区域（和对应于分别为第三阶和第四阶的渐近切线）。

在双峰骆驼（见图 39）的背上有一条由渐近线的拐点组成的曲线。通过它的点的所有第三阶曲线作成一个曲面。当我们从这头骆驼身旁走过时，我们与这个曲面两次相交。在相交的那一刻，这头骆驼背部的可见轮廓有 $y^8=x^4$ 型的奇点，并且其投影是属于类型 6 的。

余下的奇点出现在沿抛物点上的渐近方向的投影上。这些奇点中最简单的是奇点 3 和 4。投影 3 出现在随着土岗的降低我们最早开始看到它的轮廓的那一刻(见图37)。这个轮廓上出现的第一点是抛物点。

当人们通过奇点 4 时，可见轮廓的两个分支或者合在一起来了，或者分离开来了。

只有沿一些孤立的方向投影，才能得到奇点 5、7、8 和 9，因而需要有意识地去寻找才能得到。8和 9 是沿第四阶的切线的投影；7 是沿第三阶的抛物切线的投影；5 是沿“无穷近的抛物点上的渐近方向”的投影的点。对于从孤立点的投影来说，还会出现另外的四种奇点：$z=x^3 \pm xy^4$，$z=x^5+xy$ 和 $z=x^4+x^2y+xy^3$。因此，如果把正常点 $z=x$ 也包括在内的话，那么一般状况光滑曲面从其所属的三维空间的所有点的投影，拥有不等价奇点的总数为 14 (普拉托诺瓦和 O.П 什尔巴克)。

第十三章　越过障碍的问题

我们来考虑三维欧氏空间中边界为光滑曲面的一个障碍（图60）。很清楚，越过这个障碍，从 x 到 y 的最短道路，由直线段和障碍曲面上的测地线（长度最小的曲线）段组成。最短道路的几何主要是受障碍曲面上的各种弯曲的影响。

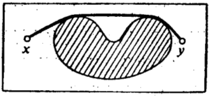


图 60

假设道路的起点 x 是固定不动的。我们来考虑从 x 出发到所有可能的点 y 的最短道路。从 x 到被障碍拦住了的那些点 y 的道路，是以与障碍相切的一些直线段为开端，接下来的一段为障碍曲面上一束测地线（单参数），再下一段又是与测地线相切的一些直线段；这些线段可以或者终止于端点 y，或者又一次与障碍曲面相切，等等。

我们来考虑最简单的情况，即由一条初始直线段、一条终止直线段以及一条连接其间的测地线段组成的道路。在这个测地线束中邻近的测地线填满障碍曲面上的某个区域。在这个区域的每个点上，这个测地线束中的每一条测地线，都有一良定的方向。在一般状况的点上，这个方向不是渐近方向。这个测地线束中的测地线与渐近方向相切的条件，实际上就是一个关于障碍曲面的点的条件。对于一般状况曲面和测地线束，这个曲面的某条曲线——依赖于测地线束——上的点都满足这个条件。在图 61 中，渐近方向用水平直线段标出，切点组成的曲线用字母 K 标记，测地线则都用黑体曲线标明。

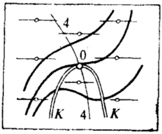


图 61

在一些孤立点(图61中的0)上，曲线K本身会有渐近方向。这些孤立点都是K与渐近线的拐点组成的曲线4 (见第十二章)的交点。

如此我们得到了一个道路的双参数族，其中一个参数决定这个测地线束中的测地曲线，另一个参数决定脱离障碍曲面的切线段的脱离点。沿每条道路都可以定义一个时间函数,时间从起点x开始算起，经由这样的道路到达终点y所需的时间，并不是唯一确定的，因为可以通过几条这样的道路到达y，而且，并非所有这样的道路都越过了障碍。然而显见，对上述定义的多值时间函数进行研究，是最短道路系统的奇点的研究中必不可少的步骤。

我们在障碍的后面再放置另一个一般状况的曲面——一堵墙。我们来考虑从障碍曲面到墙上的脱离映射 (break-away mapping)。这个映射把障碍上的每个点对应于一条切线与这堵墙的交点，这条切线是这束测地线的一条在该点脱离此障碍的切线。

当这堵墙移向无穷远处时，脱离映射就成了这个测地线束的高斯映射，它将障碍曲面上的每个点对应于单位球面上的一个点，即平行于测地线的切线的单位向量的端点。

脱离映射和这个测地线束的高斯映射，只在由那些点组成的曲线上有奇点，在这些点上测地线的方向就是渐近方向。普拉托诺瓦后来证明，这些奇点在一般点上是折迭，在该曲线的方向自身是渐近方向的特殊点上是尖点。

这个多值时间函数在对应于渐近方向的脱离点上也有奇点。在适当选取的光滑坐标之下，这个多值时间函数在奇异曲面 $y=0$

的一般点的邻域内，形如 $T=x-y^{5/2}$。换言之，如果我们在每条脱离射线上，标出对应于长为 T 的道路的点，那么这些点就形成一个局部由方程 $x^2=y^6$ 给出的带尖脊的波阵面的曲面(图 62)。

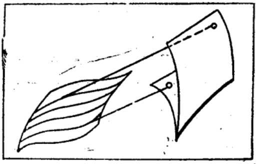


图 62

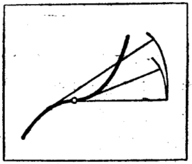


图 63

在平面问题中，我们得到了类似的结果。在此情形中，所得的波阵面被称为渐伸面 (involute)，并且在拐点的切线的点上有 $x^2=y^6$ 形式的奇点(图 63)。

在空间问题中，对时间函数和所得波阵面在奇异点——这个测地线束的高斯映射的尖点——的结构，却只有定性的了解；在此情形中，就是对越过障碍(有多个接头，即在道路上有几段测地线)用时最少的真正的时间函数的奇点，也没有全面的分析。

在这里，就象在奇点理论的其它一些问题中那样，还有大量的工作可做。

第十四章 辛几何与接触几何

奇点理论中的许多问题，譬如，焦散面和波阵面的奇点的分类，以及最优化问题中和变分法问题中各种奇点的研究等，只有在辛流形和接触流形的几何理论的框架之下，才会变得是可以理解的。这种几何与往常的欧氏几何、罗巴契夫斯基几何和黎曼几何不相同，是一种全新的几何。

我们从一种特殊类型的奇点的三个例子开始。

1. 梯度映射

假设我们在欧氏空间上有一个光滑函数，则梯度映射就是把每个点都对应于此函数在这个点的梯度的映射。梯度映射是维数相等的空间之间的一类非常特殊的映射。

一般状况的梯度映射的奇点，与维数相等的空间之间一般映射的奇点并不相同：前者比后者要“少”，因为并不是每个映射（在局部微分同胚之下）都可以变成梯度映射；但是，前者比后者又要“多”，因为对于一般映射不是典型的现象，对于梯度映射却可能是典型的。

2. 法映射

我们来考虑三维欧氏空间中一个曲面的所有法向量组成的集合。我们将每个向量对应于它的端点，即将以点q为基点的向量p对应于点$p+q$。这样，我们就得到了一个从由法向量组成的三维流形到三维空间的映射（若我们是从n维欧氏空间的任意维子流

形入手的，则所得的是一个从 n 维流形到 n 维空间的映射）。

这个映射称为原来那个流形的法映射。一般状况的子流形的法映射的奇点，构成维数相等的空间之间的映射的奇点的一个特殊类。法映射的临界值形成原来那个子流形的焦散面（曲率中心的轨迹）；见图33，在那里原来那个流形是一个椭圆。

3. 高斯映射

我们来考虑三维欧氏空间中的一个双侧曲面。我们将这个曲面的每个点上的单位正法向量，都平移到原点上。这些向量的顶端都位于单位球面上。这样得到的、从这个曲面到单位球面上的映射，称为高斯映射。

所有的高斯映射也构成维数相等的流形之间映射的另一特殊类（若我们是从 n 维空间中的一个超曲面着手的，则流形的维数为 $n-1$）。

可以证明，所有这三类映射——梯度映射、法映射和高斯映射——的典型奇点都相同：所有这三种理论都是辛几何中拉格朗日奇点的一般理论的特殊情形。

辛几何就是相空间——经典力学的位置和动量的空间——的几何。它代表了力学、变分法等等长期发展的结果。

在上个世纪，人们把几何的这个分支称为分析动力学，而且拉格朗日以它完全避开了图形为骄傲。要想跨越漫长的历史发展过程，来探讨辛几何，最简单的是采用公理化方法。这个方法，如伯特兰·罗素所指出的那样，有许多好处，这些好处类似于剽窃他人诚实工作的好处。

这个方法的实质在于将定理转化为定义。于是，一个定理的内容就成了某个定义的来源，而代数学家们为了增强其学科的权威性，通常对这种来源绝口不道（要理解没有来源的定义，是不可

能的，但一架飞机上又有多少名乘客，知道飞机是怎样以及依据什么原理造出来的呢？)。

毕达哥拉斯定理，是它那个时代中数学文化的最高成就，而在现今的公理化的欧氏几何中却被简化为一个普普通通的定义：线性空间中的一个欧氏结构就是向量对的、一个对每个自变量都是线性的对称函数(数积)，并且任意一个非零向量与自身的数积都是正数。

可以类似地定义线性空间中的一个辛结构：它就是向量对的一个对每个自变量都是线性的斜对称函数(斜数积)，并且这个斜数积还是非退化的(没有与每个向量都斜正交的非零向量，即每个非零向量都有与它的斜数积不为零的一些向量)。

例子：我们把有向平面上两个向量所张成的平行四边形的有向面积，即由这两个向量的分量形成的矩阵的行列式，定义为这两个向量的斜数积。这个乘积就是这个有向平面上的一个辛结构。

三维空间(或者一般地，任意的奇数维空间)上无辛结构。把一个四维空间(或者一般地，一个偶数维空间)表成一些二维平面的和，就很容易在其上构造出一个辛结构：这个空间中两个向量的斜数积，定义为这两个向量在这些平面上的投影所张成的平行四边形的有向面积的和。

与维数相等的所有欧氏空间都同构一样，维数相等的所有辛空间也都是同构的。我们将把两个向量的斜数积，叫做这两个向量所张成的平行四边形的“面积”。

欧氏空间的每个线性子空间都有一个正交补，它的维数等于原来那个子空间的余维数。

在辛空间中，一个线性子空间的斜正交补的定义如下：它由与这个子空间的所有向量的斜数积都为零的所有向量组成。斜正交补的维数也等于原来那个子空间的余维数。例如，平面上一条直

线的斜正交补就是这条直线自身。

如果一个线性子空间是其自身的斜正交补，那么我们称其为拉格朗日子空间。拉格朗日子空间的维数等于原来那个辛空间的维数的一半。

一个流形上的一个黎曼结构，是由在该流形的每一点的切空间上选取一欧氏结构给出的。

与此完全类似，流形上的一个辛结构是由在每个切空间上选取一辛结构给出的；然而，与黎曼情形完全不同，如下面所解释的那样，这些结构不是无限制的，而是互相关联的。

一个流形上的黎曼结构，使得我们可以用求组成其上一条曲线的所有小向量的长的和这种方法，来度量这条曲线的长度。与此完全类似，辛结构使得我们可以度量位于辛流形中的二维有向曲面的"面积"(用求构成这个曲面的所有小平行四边形的"面积"的和这种方法)。联系不同切空间中的辛结构的附加条件是，任何三维图形的整个边界的"面积"应为零。

人们可以通过把以任意一个点为基点的两个向量的斜数积，定义为将这两个向量平移到原点所得的两个向量的斜数积，而在任何一个线性辛空间上引入辛流形的结构。容易验证，这里也满足相容性条件。

在平面或更高维的空间的点的邻域内存在许多不同构的黎曼结构。黎曼为了把它们区分开来，引入了黎曼曲率。

与黎曼流形不一样，给定维数的所有辛流形在它们每一个点的邻域内都是同构的(可以保持"面积"地把一个映到另一个上)。因此，每个辛流形都局部同构于一个标准线性辛空间。在这样的一个空间中，我们可以引入坐标 $(p_1,\cdots p_n, q_1,\cdots,q_n)$，使得斜数积等于在这些平面 (p_1, q_1)，…，(p_n, q_n) 上的投影的有向面积的和。

如果辛空间的一个子流形在每一点上的切空间都是拉格朗日子空间，那么我们把这个子流形称为拉格朗日流形。

把辛空间分为子流形的纤维化称为拉格朗日纤维化，如果其所有纤维都是拉格朗日流形。

任何拉格朗日纤维化都局部同构于相空间在构形空间(configuration space) 上的标准纤维化$(p,q)\longrightarrow q$(其纤维为动量q=常数的那些空间)。构形空间，即 q 空间，称为这个纤维化的底空间。

现在我们假设在拉格朗日纤维化的空间中，还给了另一个拉格朗日流形。则我们得到一个从这个拉格朗日流形到拉格朗日纤维化的底空间(这也就是说，到坐标为 q_1 的构形空间)的光滑映射：它把这个拉格朗日流形的每个点(p,q)对应于构形空间中的点q。

这样得到的维数都为n的两个流形之间的映射称为拉格朗日映射，并且它的奇点都称为拉格朗日奇点。

这些奇点形成维数相等的流形之间的光滑映射的奇点的一个特殊类。人们已经构造出了这一类奇点的分类理论，这个理论类似于一般奇点理论。

当$n=2$时，正像在一般奇点中那样，折迭和尖点是仅有的一般状况的拉格朗日奇点(然而，拉格朗日尖点有二种在拉格朗日意义之下不等价的[1] 变式)。

一般状况的三维拉格朗日流形之间的拉格朗日映射的奇点，就已经不是全都能够在通常一般状况的奇点中找到了。

现在，我们来证明梯度奇点、法奇点和高斯奇点都是拉格朗日

---

[1] 两个拉格朗日奇点之间的一个拉格朗日等价关系，就是一个从第一个拉格朗日纤维化到第二个拉格朗日纤维化的映射，这个映射将纤维映到纤维上，并且还将第一个辛结构映到第二个辛结构内，此外还将第一个的拉格朗日子流形映到第二个的拉格朗日子流形内。

奇点：

1．设 F 是 p 的光滑函数，则流形 $q=\partial F/\partial p$ 是拉格朗日流形。所以，梯度映射的奇点都是拉格朗日奇点。

2．我们来考虑欧氏空间中的一个光滑子流形，以及（在这个流形的所有点 q 上）垂直于这个流形的所有向量组成的集合。以点 $p+q$ 为始点的所有向量 p 形成的流形是拉格朗日流形。法映射可以看作是从这个流形到底空间的拉格朗日映射 $(p,p+q)\longrightarrow(p+q)$。

3．我们来考虑欧氏空间中所有有向直线组成的流形。这个流形是辛流形，因为它可以看作是一个在球面上运动的点的相空间（直线的方向决定球面上的一点，而直线与球面的垂直于它的切平面的交点决定动量的值）。

我们来考虑同一个欧氏空间中一个曲面的所有正向法线组成的流形。它是由所有有向直线组成的辛流形的子流形并且是拉格朗日流形。那么，这个曲面的高斯映射可以看作是一个拉格朗日映射，即从刚构造的子流形到球面——相空间的拉格朗日纤维化的底空间——上的投射。

因此，梯度奇点理论、法奇点理论和高斯奇点理论都归属拉格朗日奇点理论。

刚才我们见到的有向直线组成的流形上辛结构的形成，没有初看上去似乎那样不自然。关键是，任何变分问题的解集，或一般地，哈密顿函数取固定值的哈密顿方程的解集，是一个辛流形，这个流形对于研究这些解的性质是非常有用的。

例如，我们来考虑如图 62 所示的、从三维空间中障碍曲面的测地线束脱离的双参数射线族。可以证明这个族是所有射线组成的四维空间中一个二维的拉格朗日子“流形”，但它与我们早先见

到的拉格朗日子流形不一样，自身就有奇点，人们称其为拉格朗日簇。这些奇点出现在那些脱离射线为障碍曲面的渐近线处。这种射线形成所有脱离射线组成的拉格朗日簇的（$x^2=y^3$ 类型的）尖脊。

在这条尖脊上有一些特殊点。在这种点的邻域内，脱离射线形成的簇辛微分同胚于开燕尾。开燕尾是由所有多项式$x^5+ax^3+bx^2+cx+d$ 组成的四维空间中那些有三重根的多项式形成的曲面。

这个多项式空间有一个自然的辛结构，这个结构是从二元型的空间的在 SL(2,R) 下不变结构继承来的，并且开燕尾在这个多项式空间中是一个拉格朗日子簇。在奇点理论的其他一些问题中，例如在运动的波阵面的尖脊扫出的焦散面的研究中，也会遇到开燕尾，而且看来它还是将建立的拉格朗日簇的理论的一个基本例子。

在欧氏几何和黎曼几何中，有一种外曲率(external curvature)的庞大理论：除了子流形由其度量决定的内蕴性质以外，具有相同内蕴几何的子流形嵌入空间的方式也可能会有差别。

在辛几何中，如吉文塔利最近所证明的那样，情况要简单一些：内蕴几何（辛结构在子流形的切向量组成的集合上的限制）决定外部几何。换言之，具有相同的内蕴几何的子流形，借助于它所在空间的保持辛结构的微分同胚，可以局部地从一个变到另一个。

这为奇点理论开辟了新的一章——辛空间中子流形的配置的奇点的研究，梅尔罗斯在最近几篇关于衍射的文章中注意到了它的重要性。利用吉文塔利定理，从马蒂雷及其学生关于辛结构的退化的一些结果，得到了这种奇点的分类的一些初步结果。例如，用保持辛结构的变换，可将四维辛空间中一个一般状况的二维子流形局部简化为下述两个标准型之一：

$$p_2 = q_2 = 0 \text{ 或 } q_1 = 0, p_2 = p_1^2.$$

在奇数维流形上绝不可能有辛结构，但却有接触结构。接触几何能满足光学和波传播理论的需要，而辛几何能满足力学的需要。

奇数维流形上的接触结构是由每一点上切空间中的超平面(余维数为一的子空间)的选取决定的。维数固定的流形上两个超平面场是局部等价的，即通过微分同胚可将一个变到另一个，只要它们在所考虑的那些点的附近都是一般状况的。

一个**接触结构**就是超平面的一个场，这个场在奇数维流形的每个点的附近都是一般状况的。

平面上所有线元素组成的流形就是接触流形，而且是三维的。它的接触结构给出如下：一个线元素的运动速度属于接触场的超平面，如果这个线元素的附着点的速度属于这个线元素的话。与此完全类似，我们可以在任意 n 维流形中的所有超平面元素组成的 $(2n-1)$ 维流形上定义一个接触结构。

在接触情形中，拉格朗日流形的作用被勒让德流形取而代之。勒让德流形就是超平面场的维数尽可能大的积分子流形；由超平面场满足一般状况性条件可知，这个维数在 $2m+1$ 维的接触流形中为 m。

波阵面、勒让德变换还有光滑超曲面的对偶超曲面等的奇点，都是勒让德奇点。整个辛理论(例如，包括吉文塔利定理)都有类似的接触理论，这对变分问题中奇点的研究极为有用。

近几年来，在数学的所有领域中都出现了辛几何和接触几何。正像每个云雀一定都会炫耀自己的冠毛一样，数学的每个领域最终也将辛化。在数学中有一个由不同层次的运算组成的序列：函数作用在数上，算子作用在函数上，函子作用在算子上，等等。辛化是很少几个最高层次的运算中的一个，它不是作用在很小的函畴

(fry)——函数、范畴、函子——上，而是同时作用在数学的所有领域上。尽管目前已经知道有几个这种最高层次的运算，例如代数化、布巴基化、复化、超化和辛化等，但是对于它们，还没有任何一点公理论。

第十五章　复奇点

数学家们都很清楚地知道，过渡到复情形通常可以简化问题，而不会使问题更复杂。例如，每个n次代数方程都恰好有n个复根，而要想找到其实根的个数却是困难的。

之所以出现这种现象，是因为一个复方程相当于两个实方程，而由两个实方程给定的集合，比方说空间中的曲线或者平面上的点，称为余维数为二，但余维数为二的集合并不能分割它所在的空间。因此，从给定的余维数为二的集合外、其所在的空间中任意一点出发，走一条与该集合不相交的道路，可以到达另外任何一个这样的点。

我们来考虑复对象——比方说给定次数的复系数多项式——组成的某个空间。特殊的对象，比方说有重根的多项式，都由其系数的复方程确定。所以，特殊对象组成的集合的余维数为二，因而它不能分割所有对象组成的空间。例如，复燕尾是由复多项式x^4+ax^2+bx+c组成的空间中有重根的多项式形成的，它就不能分割所有这样的多项式组成的空间（这个空间的实维数为六）。

因此，从任何一个非特殊的复对象（例如无重根的多项式）出发，走一条完全落在非特殊的复对象组成的区域（在我们所举的例子中，为无重根的多项式组成的区域）内的连续道路，可以到达任何其它的一个非特殊的复对象。但是，对一个非特殊的对象作轻微的形变，并不会使其拓扑发生变化。例如，如果人们对无重根的多项式的系数所作的变化足够小，那么该多项式根的个数就不会变。所以，给定类的所有非特殊的对象都有相同的拓扑不变量。例

如，所有给定次数的无重根的多项式，复根的个数都相等。故而，为了知道所有非特殊的复对象的拓扑，只须研究它们之中的任何一个的拓扑就行了。例如，人们只须找到任何一个无重根的方程复根的个数就可以了①。反之，在实情形之下，特殊对象组成的集合将所有对象组成的空间分为几部分。例如，通常的燕尾（图 30）将实多项式 x^4+ax^2+bx+c 组成的空间分为三部分，其中一部分由有四个实根的多项式组成，一部分由有两个实根的多项式组成，第三部分由无任何实根的多项式组成（请试着弄清楚空间中的哪一部分有多少个根!）。

现在，我们把 (x,y) 平面上的那些曲线看成是我们的研究对象，这些曲线由一个形如 $f(x,y)=0$ 的条件给出，其中 f 是某个给定次数的任意多项式。例如，如果次数为二，这种曲线通常就是椭圆或者双曲线（所有其它的二次曲线对应于特殊的、奇异的情形）。

所有满足方程 $f(x,y)=0$ 的复数对 (x,y) 组成的集合，称为复曲线。从实的观点来看，复曲线是四维空间中的二维曲面。通常，即对于多项式 f 的系数的几乎所有的值，复曲线都是非奇异的。由前述理由可知，所有给定次数的非奇异复曲线都拓扑等价于实曲面。因此，对给定次数的任何一个非奇异复曲线进行研究，就足以找到这些曲面的拓扑。

可以证明，答案如下：球面粘上 $g=(n-1)(n-2)/2$ 个环柄，再从其上去掉 n 个点，就得到了所需的曲面。例如，复直线（$n=1$）就是实平面——去掉了一点的球面，复圆就是实圆柱面——去掉了两点的球面，次为 3 的复曲线与有三个孔的环面有相同的拓扑结构。

验证这个结果的最简单方法是，从 n 条直线组成的集合经过小

---

① 以方程 $(x-1)\cdots(x-n)=0$ 为例就足够了；在上面举出的论据中不需要增添什么，就可以完全严格地证明“代数基本定理”。这个定理说次为 n 的每个方程都有 n 个复根。

扰动得到非奇异曲线。比方，我们从 n 条实直线出发，这 n 条直线在实平面中处于一般位置上，因而它们相互之间累计共有 $n(n-1)/2$ 个交点（图 64）。每条直线都由一个形如 $l=0$ 的非齐次线性方程给出，其中 $l=ax+by+c$。我们把对应于这 n 条直线的所有线性函数 l 都乘在一起。这个乘积只在这些直线上为零。将由这些直线组成的折线 $f=0$ 代之以非奇异曲线 $f=$（很小的数），而这就是我们所需的小扰动。

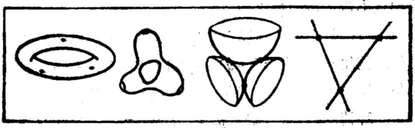


图 64

如果我们现在转向复数 x 和 y，那么每条直线就都变成了实意义之下的一个平面，因此曲线 $f=0$ 通过复化之后，变成一个由 n 个实平面组成的集合。在四维空间中，每一对这样的平面都相交于一点。因为事实上，点经过复化后，仍为点。在上面所描述的小扰动之下，这个曲面变成光滑的了。从拓扑学的角度来看，这个光滑化是以这样的方式来实现的：两个相交平面中的每一个都挖去交点的一个邻域，由此而形成的两个洞的边界都是圆，然后（用产生可定向曲面的那种方法）把这两个圆粘在一起。

例如，三个两两相交于一点的球面，在光滑化三个交点之后，就产生了一个环面（图 64）。完全类似地，n 个球面产生一个有 $(n-1)(n-2)/2$ 个环柄的球面，因而我们从 n 个平面出发，可以得到一个有同样多个环柄但去掉了 n 个点的球面。

因此，我们解决了确定次数为 n 的非奇异复代数曲线的拓扑结构的问题。在上述构造中出现的带环柄的球面，称为该曲线的黎曼

曲面①。

至于次数为n的实平面曲线，目前只知道当$n \leqslant 6$时它们的拓扑结构，但却不知道实曲线的分支在平面上有哪几种可能的排列。

像曲线理论那样，当我们转向复域时，奇点理论也变得较简单了；许多现象，从实的观点来看，似乎相当神秘，但在复域上却有透彻的解释。

例如，我们来考虑复函数的最简单的临界点的结构，即考虑极大值和极小值理论的复化。

对于实函数来说，临界点是与等高线或等高面的结构变化有联系的。例如，函数$f=x^2+y^2$的实等高线$x^2+y^2=c$，当$c<0$时为空集，当$c>0$时为圆。函数$f=x^2-y^2$的实等高线的结构变化又是另一种情况：双曲线$x^2-y^2=c$的渐近线，通过此双曲线的分支，以什么方式相联系，取决于c的符号。在这两个例子中，$c=0$是唯一的一个临界值。临界等高集是非光滑的，而非临界等高集却是光滑流形。

在复情形中，函数值的坐标轴变成了复变量c的平面。临界值位于这个平面的孤立点上，因而它不能将这个平面分为几部分。因此，对于c的所有非临界值来说，其等高流形有相同的拓扑结构。当c变化并通过临界值时，并不会使结构发生任何变化：诚然在c通过临界值的那一瞬间，等高集变成了奇异的，但随后马上它却又回复到原来的拓扑型上去了。

在复情形中，不是通过临界值，而是应该绕临界值转一圈。这是那个说实概念“边界”的类似复概念为“分枝覆盖”的一般原则的

---

① 顺便说一句，从环面的拓扑性质——即任意两条子午线将环面分为两部分这个事实——可知，对于势能是次为四的多项式的力学系统来说，总势能相等的两个势井的每一个中的振荡也将有相同的周期。因为在圆环的黎曼曲面上，两种情形下势能的等高集——两个势井的相曲线——是不相同的子午线。

一种表现形式。

因此，我们来考虑复变量c的平面上绕某个临界值转的道路。

与这种道路上每一点相对应的是一个非奇异的等高流形$f=c$。当c连续地变化时，等高流形也连续地变化，但其拓扑保持不变。

换言之，我们可以用这样一种方式，把初始非奇异等高流形上的每个点，与一个邻近等高流形上的一个邻近点对应起来，使得我们在这两个等高流形之间建立起一个双向连续的一一对应。因此，我们可以把初始等高流形与任何邻近高度c的等高流形等同起来。

当c连续地变化时，这个等同也连续地变化，而最后当c回到它原来的位置上时，我们就得到了一个原来那个等高流形与其自身的等同。我们把这个等同称为单值等同(monodromy)。

所以，单值等同就是非奇异等高流形到自身上的、一对一的、双方连续的映射。可以证明，这种映射绝对不是恒等变换：因为当c绕临界值转了一个整圈之后，对于值c，只是等高流形作为一个整体回到了它原来的地方上，而并非其每一单个点都回到了它们原来的位置上①。

为了了解在单值等同之下非奇异等高流形的点会发生什么变化，我们来考虑例子$f(x,y)=x^2+y^2$。我们首先考虑的是非奇异等高流形$x^2+y^2=c, c\neq 0$。在实的情形之下，这个方程确定的是一个圆，但我们感兴趣的是“复圆”——两个复变量的平面上（复）坐标的平方和为给定值的点(x,y)组成的集合。

我们已经知道，从拓扑学的角度来看，这种曲面就是四维空间

---

① 这里的情况同麦比乌斯带上的情况一模一样。在沿麦比乌斯带的坐标圆连续地转一圈的过程中，我们可以连续地将与此坐标圆横截的线段相互等同起来。但当我们首次回到原来那个线段上来时，所得的这个线段与自身的等同将其首尾掉了个。

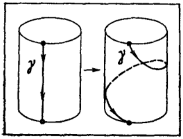


图 65

中的二维柱面。

可以证明，单值等同将柱面上的每个圆都旋转了一个互不相等的角度，这个角度连续地从在柱面的一个底上为零变到在另一个底上为2π。因此，柱面的两个底边上的任意一点都原地未动，而柱面却整整扭了一圈，例如使得柱面的母线变成了从一个底到另一个底的，绕柱面转了一个整圈的螺旋线(图 65)。

为了弄清楚为什么会是这样，我们来更详细地研究"复圆"。复圆的方程可以写成 $y=\sqrt{c-x^2}$ 的形式。从这个公式我们可以看出，对于 x 的每一个(复)值，都存在 y 的一对对应值，除开 $x=\pm\sqrt{c}$ ——对于 x 的这两个奇异值中的每一个，我们都只能得到 y 的一个唯一的值(零)。

所以，复"双值函数"$y=\sqrt{c-x^2}$ 的图形在复变量 x 的平面上展开为两叶；而且，这两叶仅在两点相连。但是，单单去掉这两点，并不能将这两叶分离开来。事实上，我们使 x 绕这两点之中的一个点转一小圈，刚好转一圈。y 的对应值连续地变化，但不会回复到它以前的值上去，而是变到新的值上去了。事实上，从公式

$$c-x^2=(\sqrt{c}-x)\ (\sqrt{c}+x)$$

我们可以看出，在 x 绕两点$\pm\sqrt{c}$中之一点转了一圈之后，在这两个因式中，有一个的幅角变了2π，而另一个的幅角保持不变。因此，y 的幅角经过这一圈之后变了 π，即 y 的符号变了，因而 y 从一叶变到另一叶上了。

如果 x 绕点$\sqrt{c}$转了二圈，y 这个量就回到了它原来那个值上。点 $x=\pm\sqrt{c}$ 称为函数 $y=\sqrt{c-x^2}$ 的**分枝点**。

为了更好地了解由此函数定义的曲面，我们把这两个分枝点

用一条线段连接起来。如果 x 在平面上漫游但不经过这条线段上的任何一点。那么，只要 x 走的是闭路径，y 就将回到其初始值上来。的确，绕这两个分枝点中的任何一个单转一圈，就会使得 y 从一叶变到另一叶上。所以，绕这整个线段转一圈，并不能使 y 的符号发生变化。

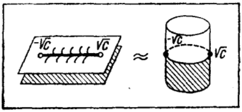


图 66

很清楚，曲面 $x^2+y^2=c$ 具有如下的拓扑结构：这个曲面为两个复平面(其中变量记为 x)的并，在每个平面上沿在这两个分枝点之间的线段切开一条缝，每个平面的缝的上边与另一个平面的缝的下边粘在了一起。以拓扑学的眼光来看，这个曲面就是一个柱面。在这个柱面上，那条缝变成了赤道圆(图 66)。

当 c 趋近临界值 0 时，这两个分枝点一齐靠拢。在 $c\to 0$ 这个极限过程中，连接这两点的线段，以及在此黎曼曲面上绕这条缝线转的道路，在此临界点上都消失了。这就是为什么把柱面 $x^2+y^2=c$ 上的赤道圆称为消没圈(vanishing cycle)的原因。

当 $c>0$ 时，这个消没圈就是通常的实圆。所以，对于临界值附近的给定的函数值，我们已经知道了临界点附近的典型非奇异等高集的结构。该函数的确切形式是否知晓在这里并不重要，只要知道临界点是非退化的就行了。之所以如此，是因为从拓扑学的角度来看，复函数的所有非退化临界点局部都是相同的，这也就是说，复函数在其所有非退化临界点的附近都是拓扑等价的。这与上面解释的一般原则(复退化是两个实条件的叠加)相一致。特别的是，对于双曲情形 $(x^2-y^2=c)$，消没圈的拓扑同其在椭圆情形 $x^2+y^2=c$ 下的拓扑一样，但在双曲情形中，整个消没圈都位于复域内，因而在实 (x,y) 平面上是看不到它的。

现在，设c绕临界值转了一小圈。我们使用我们分析复函数的复等高曲线的方法，来研究这个单值等同。如果我们挖去奇异点的一个小邻域，那么对c的值充分靠近临界值时的所有（实的或复的）等高曲线，都可以一对一地、双方连续地投影到奇异点的上述邻域外的临界等高曲线上（图 67）。

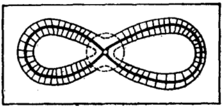


图 67

由此可见，单值等同，即c的等高曲线的等同，是沿c围绕临界值所走的路径连续地变化的。所以，我们可以选择这样的单值等同，使得当c转了整整一圈之后，等高曲线的所有位于上述邻域外的点都回到了它们原来的位置上。

余下的是只须研究在此邻域内的情况怎样。为此，只须考虑标准函数$f=x^2+y^2$就足够了。从拓扑学的观点来看，这个函数的复等高曲线落在此邻域内的部分就是一个圆柱面，这个圆柱面的两个底边都位于此邻域的边界上。与此同时，就像上面所解释的那样，这一部分形成复变量x的平面上某个区域的一个双叶覆盖，这个双叶覆盖有两个分枝点$\pm\sqrt{c}$（图 66）。

在c围绕零转了整整一圈之后，这两个分枝点之间的线段转了半圈，结果又回到了这两个分枝点上，只是首尾互换了一下。如果我们连续地把在c的绕行过程中产生的黎曼曲面相互等同起来（以边缘上的点总是保持在它们原来位置的附近这样的方式），最后我们就会得到这个圆柱面到自身的一个映射（单值等同），这个映射以下述方式组成。

图 68 的 1 中用字母γ标记的圆柱面的一条母线，相继与中间曲面(2,3,4)上用同一个字母标记的曲线等同起来。最后，我们又回复到原来那个圆柱面(5)上，但曲线γ变成了一条有相同端点的

新曲线。容易看出，这条新曲线，就像图 65 中所绘的那样，在此圆柱面上沿准圆旋转了整整一圈。

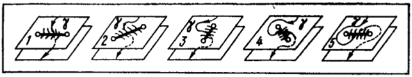


图 68

因此，这个单值等同将函数的复等高曲线位于非退化临界点附近的圆柱面部分，恰好拧了整一圈。在这个单值等同之下，消没圈旋转了一个 π 的角度之后，仍回到自身上了。但是，一般来说，等高曲线上其它的圈都变成了新的圈。换一句话说，每当某个圈沿此圆柱面的母线通过消没圈时，这个单值等同就把该圈变成了一个消没圈。因此，该圈在单值等同之下的象，可以用在其上添加若干个消没圈的方法来得到，其中消没圈的个数等于该圈通过它的次数(计算时要考虑符号)。如果这个数目等于零，那么就说该圈与消没圈正交。这样的圈在单值等同之下是不变的。

用这种方法，我们推出了关于两个变量的函数的“皮卡—勒弗雪兹公式”，这是函数的临界点的复理论中的一个基本公式。如果我们转向变量的个数为任意整数 n 的函数，消没圈就变成了一个 $n-1$ 维的球面，并且圆柱面被代之以这个球面的所有切向量组成的集合。若变量的个数 n 是奇数，则这个单值等同作用在这类圈上，就相当于在与消没圈正交的镜上反射它们。消没圈自身在单值等同的作用之下，符号变了。

在一般状况的小扰动之下，函数的复杂的(即退化的)临界点分解成最简单的(即非退化的)临界点。一般状况的小扰动作用的结果是，出现了几个非退化的临界值，而且在这些临界值的每一个的近旁都有一个消没圈。绕这些临界值中的任何一个转一圈，就定

义了一个单值等同变换。如果从一个非临界的初始值出发，沿一条非临界的道路，逼近这些临界值中的任何一个，那么就可以将这个临界值的消没圈变成扰动后的函数的初始非奇异高度的等高流形。结果就产生了整整一个集合的消没圈。

例如，函数 x^8+y^2 的非奇异复等高曲线为去掉了一点的环面。稍许扰动了的函数 $x^8-\varepsilon x+y^2$ 有两个临界值（图 69)。从这个函数的非临界复等高曲线逼近这两个临界值，在这个环面上确定了两个消没圈——这个环面的纬度圈和子午圈。与此完全类似，在函数 $x^8+y^8+z^2$ 的等高曲面上有两个相交于一点的消没球面。相应的单值等同变换都是圈类组成的空间在与消没圈正交的镜子上的反射。

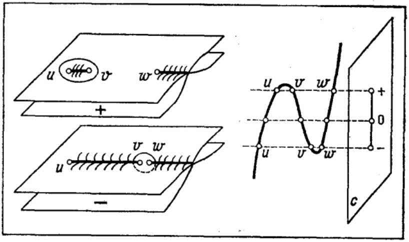


图 69

因此，在函数的临界点理论中出现了反射群：它们由在绕扰动了的函数的临界值转圈之下的单值等同变换构成。

反射群的理论是数学的一个内容丰富的部分。例如，我们来考虑平面上的两个镜子。如果这两个镜子之间的夹角与 2π 是不可通约的，那么可从这些镜子上的反射的组合得到的不同变换，就有无穷多；但是，如果夹角与 2π 是可通约的，那么不同的变换就仅

有有限个。与此完全类似，我们可以找到三维空间中过零点但只产生有限个变换的镜子的所有排列；就是对于任意维的空间，这种排列的分类也是已知的。

函数最简单的退化临界点的单值等同群的计算，一方面揭示了函数的临界点理论与焦散面和波阵面的理论之间深刻的联系，另一方面也揭示了函数的临界点理论与由反射生成的群的理论之间深刻的联系。

这种联系的表现形式有时看起来很是出人意料。例如，我们来考虑平面上越过障碍的问题，这个障碍的边界是一条有一通常拐点的一般状况的光滑曲线。在此问题中，时间等高线都是这条光滑曲线的渐伸线。这些渐伸线在这条光滑曲线上有（阶为3/2的）奇点，在拐点的切线上有（阶为5/2的）奇点。可以证明，由于通过拐点而引起的渐伸线的奇点的结构的变化，是受二十面体的对称群控制的。例如，由此可以推出，用坐标的光滑变换，就可以将（多值）时间函数的在拐点的邻域内的图形，简化为一个多少有点象燕尾的标准形式。事实上，这个标准形式就是有重根的多项式 $x^6+ax^4+bx^2+c$ 的曲面〔或者就是由曲线 (t,t^3,t^5) 的切线的并组成的曲面（图70）；利雅施科和О.П.什尔巴克〕。

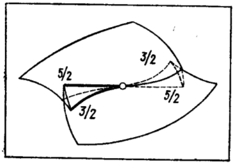


图 70

第十六章　突变理论之谜

奇点理论在自然科学中的应用，并没有囊括突变理论的所有方向：除了齐曼类型的具体研究之外，还有数学家汤姆的非常哲学化的工作。汤姆最早意识到惠特尼关于奇点理论的工作（以及彭加勒和安德洛诺夫关于分歧理论的前述工作）具有包罗一切的特性，而引入术语“突变”，并且就突变理论作了广泛的宣传。

汤姆关于突变理论的文章所具有的定性的特征，是它们的原始风格：汤姆不仅没有给出有效的证明，而且甚至也没有给出其结果的准确表述，只是指出了进一步研究的方向。齐曼对这种风格推崇备至，他发现只有在汤姆每两行话之间插入你自己的九十九行话之后，汤姆话的意思才会变清楚。

为了使读者对这种风格有自己的感受，我从汤姆在 1974 年写的一篇关于突变理论的观点的综述文章中摘录一段如下：

“从哲学的高度来看，确切地说是从形而上学的高度来看，突变理论固然不能对困扰人类的重大问题提供任何答案。但是，它却能支持赫拉克利特的辩证宇宙观。这种宇宙观认为，世界是一个理念之间、原始模型之间不间断地斗争的舞台。突变理论将我们引向一种基本上是多神论的世界观：人们必须学会在万事万物中都能发现神的手。或许也正是在这一点上，突变理论将遇到它在实际应用中那种不可避免的局限性。突变理论也许将遭受与精神分析学同样的命运。弗洛伊德在心理学中的发现的精髓毫无疑问是正确的。然而，这些知识本身对于实践（尤其是对精神错乱的治疗）并没有产生多大的影响。正像《伊利亚特》中的英雄要违背

神——比如波塞冬——的意志，只须祈求其敌对神——比如雅典娜——的保佑那样，在一场结局未卜的含糊的争辩之中，我们要限制某个原始模型的作用，只须反之以一个相对的原始模型。同样的一些原因，在某些情形中使我们能发挥作用，在另一些情形中却使我们无能为力。人们也许将能揭示某些灾变的本质，例如疾病或死亡。知识不再一定带给我们成功与生存的希望，它也同样可能告诉我们最终必将失败，必将毁灭。"①

幸亏，奇点理论的漂亮结果并不依赖于突变理论的未解之谜。但在奇点理论中，正像在所有数学中那样，也有神谜的成分：初看起来似乎相距很远的对象和理论，却有令人惊讶的一致性和联系。

这种仍然像谜一般的一致性(尽管对其已有所了解)的一个例子，就是所谓的A、D、E 分类。这个分类在数学的众多领域中，例如在函数的临界点理论、李代数、线性空间组成的范畴、焦散面、波阵面、三维空间中的正多面体和科克希契晶体反射群等理论中，都会碰到。

所有这些情形的一个共同之点，就是对简单性或没有模数的要求。简单性的意思如下：每个分类都是一个把对象组成的某个空间分为几类的分解；如果一个对象附近的所有对象仅仅分属于有限个类，那么我们就把这个对象称为是简单的。

例 1. 我们称两个由平面上过零点的直线组成的集合为等价的，如果用线性变换$(x,y)\longrightarrow(ax+by,cx+dy)$可以将其中一个变为另一个。任何一个由三条直线组成的集合都是简单的（任何一个由三条不同直线组成的集合都等价于由$x=0$，$y=0$和$x+y=0$组成的集合）。任何一个由四条过零点的直线组成的集合都不是

① Thom, R.: Catastrophe Theory: Its Present state and future perspectives, in: Dynamical Systems—Warwick 1974. Lect. Notes Math. 468, Springer—Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1975, P. 372.

简单的(证明它！)。

例 2. 我们将把(复)光滑函数的临界点加以分类。如果两个函数用变量的(复)光滑局部变换，就可以互相转变，那么我们就把它们归入同一类。简单奇点的表(比方说对于三个变量的函数)由两个无穷序列和三个例外的奇点组成：

$$A_k = x^2 + y^2 + z^{k+1}, k \geqslant 1;$$

$$D_k = x^2 + y^2 z + z^{k-1}, k \geqslant 4;$$

$$E_6 = x^2 + y^3 + z^4,$$

$$E_7 = x^2 + y^3 + yz^3,$$

$$E_8 = x^2 + y^3 + z^5.$$

例 3. 一个箭集(quiver)就是一个由一些用箭头连接起来了的点组成的集合。如果对于每个点都有一个相应的线性空间(点、直线、平面……)，并且对于每个箭头都有一个相应的(从对应于该箭头的始端的空间到对应于该箭头的末端的空间的)线性映射，那么就说给出了箭集的一个表示。两个表示称为是等价的，如果在那些空间的适当线性变换之下，可以从一个过渡到另一个。

在图 71 中，左边的箭集是简单的，右边的箭集是非简单的(参看例 1)。

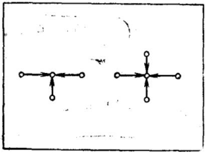


图 71

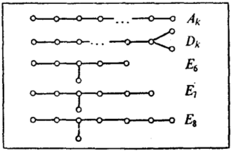


图 72

如所证明的，连通的简单的箭集正好都可从在图 72 中所绘的

登肯图上随意放置箭头得到，登肯图是由两个无穷序列和三个例外图组成的。

焦散面和波阵面的简单奇点也形成两个无穷序列A_k和D_k以及三个例外奇点E_k(这两个序列的最前面几个成员都绘在图30--41中)。

三维空间中正多面体的对称群也由两个无穷序列和三个例外群组成。这三个例外群分别是四面体的对称群(E_6)、八面体的对称群(E_7)和二十面体的对称群(E_8)，这两个序列分别是由正多边形的群和正着色多边形(dihedra)——每个面着了不同颜色的双侧多边形——的群组成的。

乍看起来，函数、箭集、焦散面、波阵面和正多面体相互之间没有什么联系。但事实上，这些相应的对象贴相同的标签，并不只是偶然的巧合：例如，从二十面体人们可以构造出函数$x^2+y^3+z^5$，并且从它人们还可构造出图形E_8以及名称相同的焦散面和波阵面。

对应于相应的对象组成的集合中的一个元素的容易验证的一些性质的是，另一些元素的完全不必是明显的一些性质。因此，所有A、D、E分类之间的关系可以用来同时研究所有简单的对象，尽管这些关系中的许多的根源，例如函数和箭集之间的联系的根源，仍然是万事万物神秘的统一性的一个尚未得到解释的现象。

对于所有科克希契反射群，包括象H_3和H_4那样的非晶体群，目前已有借助于奇点理论的解释。群B_k、C_k和F_4与函数的边界奇点有关(1978年)。看来，突变理论专家们还不知道，边界奇点与所谓不完全分歧理论的最简单(而又是最重要的)情形的关系。不完全分歧理论的更复杂的情形与完全相交的投影的戈吕诺夫理论有联系。戈吕诺夫理论极大地推广了边界奇点的理论。例如，在戈吕诺夫理论中，例外群F_4生成一个整族的奇点F_k，$k\geqslant4$。

И.Г.什尔巴克给出了F_4焦散面的几何解释。我们来考虑通常三维欧氏空间中一个带边的曲面。这个曲面的焦散面由三个曲面组成：这个初始曲面

的焦集(focal set)(由这个曲面的曲率中心形成)，边界曲线的焦集(它是这个曲面的法平面的包络)和由这个初始曲面在边界点上的法线形成的曲面。对于一般状况的带边曲面来说，在其边界上将有一些点，在这些点上这个曲面的主曲率方向与其边界相切。在沿此曲面在这样的点上的法线的焦点(focal point)上，焦散面将局部微分同胚于F_4焦散面。

二十面体的对称群H_3，与平面曲线的渐伸线在这条曲线的拐点的变态有关。在相应的平面障碍问题中，如利雅施科如O.Π.什尔巴克所证明的那样，时间函数的图象微分同胚于由奇异的H_3轨道组成的簇(并且也微分同胚于曲线$x=t$、$y=t^3$、$z=t^5$的所有切线的并)。在三维空间的障碍问题中，同一个簇描述的是在一些障碍点上的波阵面的奇点。

H_4是四维欧氏空间中有六百个面的正多面体的对称群。为了构造这个多面体，人们从二十面体的旋转群开始。在$SO(3)$的由$SO(2)$形成的双叶覆盖之下，$SO(3)$这个旋转群中阶为60的一个子群，被阶为120的"二元的二十面体群"覆盖。$SU(2)$自然地与三维球面S^3等距同构，并且这个二元群的120个元素就都是那个所需构造的$\mathbb{R}^4$中的凸多面体的顶点。

现在，我们来考虑三维空间中的障碍问题。那个(多值)时间函数的图象是四维时空中的一个超曲面。对于一般状况的障碍问题，这个超曲面在某个点，局部微分同胚于由奇异的H_4轨道组成的簇(O.Π.什尔巴克)，即在位于障碍曲面的测地线的一条切线的某个点上，与障碍曲面在抛物点上渐近相切。

附录一　突变理论之争

约翰·古肯海默①

1977 年 12 月 20 日，在加利福尼亚州伯克利市，克里斯托弗·齐曼作了 1977 年度希契科克讲演。齐曼是过去四十多年中第四位获得该项荣誉的数学家。前三位是 H·霍普夫、惠特克和哈代。齐曼讲演的题目是突变理论。

数学很少能引起公众的注意，即使在科学界内亦是如此。但是由于有充分的理由，齐曼做到了。预告英国选举、治疗精神紊乱、对付囚徒暴动以及分析心脏跳动等，只是齐曼应用基本突变理论所研究过的许多学科之中的几个。数学家们敢在距他们学科严格限制的范围如此远、如此广阔的领域内探险，是极为罕见的。由于这样做，齐曼引起了舆论的极大关注，但他的工作在数学界内却遭到了严厉的批评。突变理论引起争议的规模，同齐曼所吸引的注意力一样，在数学中也是不常见的。特别，赫克托·苏思曼和拉斐尔·查勒撰文向突变理论展开了猛烈的抨击，矛头主要指向齐曼的工作，并且苏思曼指责齐曼工作的讲演，无论是在纯数学界还是在应用数学界，都引起了反响。有什么可大惊小怪的，值得《科学》杂志在其研究简讯栏目里宣称"皇帝的新衣"呢？在这里，我们对此作了回答。

突变理论始于勒内·汤姆。六十年代中期，他写了一本题为《结构稳定与形态发生》的书。该书在出版上延误了，迟至 1972 年才得以印行。但是数学家们对此仍然有着浓厚的兴趣。汤姆文体具有一种引人兴趣的神秘，或令人苦恼的含糊，这取决于读者的看法。这就更增加了这本五年多来一直在排印中的书的神秘色彩。当这本书还在印刷中时，汤姆和齐曼就就此理论四处讲演。齐曼在他的讲演中用来阐述突变理论的例子尤其丰富多采，而且，控制空间和状态空间这两个术语的引入，也格外令人瞩目。

① 约翰·古肯海默(John Guckenheimer)现为美国康奈尔大学教授。——中译者

在过去的十多年里，对突变理论的看法迥然不同（或许是沿着尖点① 分支的吧）。关于突变理论的内容，就至少有三种不同的观点，更不用说它的应用了。为了理解突变理论，必须对这些观点分而论之；为了讨论起来方便，我们将这些观点分别冠以数学家阿诺尔德、汤姆和齐曼（按字母顺序排列）的大名。

我想，阿诺尔德将羞于与突变理论为伍。然而，他曾在给出光滑实值函数奇点的分类的最前沿工作过。这是一种处在突变理论核心地带的数学，尤其从齐曼观点来看是如此。阿诺尔德在 1974 年的国际数学家大会上的报告〔在其缺席的情况下，由柏锐斯科恩代为宣读〕，对奇点理论优美深刻之处作了极好的解说。认为突变理论只是光滑映射的奇点理论的观点，是一种保守的观点。在数学界内，关于奇点理论的正确性是绝无争议的。奇点理论对应用数学中特殊现象诸如波传播问题中焦散面等的研究的应用，也无争论可言。因为奇点理论是数学整体中的一个完整部分，从而有着可靠的"应用"。

突变——奇点理论在弹性稳定性问题中的应用，是该理论迄今最为成功的一例。英国工程师汤普森和亨特将突变理论作为他们研究弹性物体的"不足感应性（imperfection sensitivity）"的有效辅助工具。在下例中，我们将解释这些应用。考虑一悬挂重物的对称弧。当悬挂点是弧的中心时，悬挂的重物的重量就可取最大值。悬挂点可支承的最大负荷依赖于不足感应性。

突变理论以下述方式在不足感应性的分析中起到了作用。假设对一个弹性物体的可能状态组成的空间相应地有一势能函数，并且这个势能函数取局部极小值的点描述了稳定平衡状态。这样就产生了突变理论能处理得很好的数学背景：一个依赖于参数的函数取局部极小值的点的变化情况。对此描述，还有两条告诫值得一提。首先，突变理论对弹性物体的动态现象无能为力。其次，需要保留在模型中的各种参数可能有差别。在对称弧的例子中，不要由于在表示负荷的重量和悬挂点的参数空间中允许任意的坐标变换而在数学上混淆这两个量。用限制可允许的坐标变换的方法，来保持这种差别，会使将会发生哪些"突变"的分析变得复杂起来。为了处理这些应用中出现的更加错综复杂的情形，戈露彼茨基和雪费在他们即将出版的专著②中推广

① 尖点，原文 cusp，是基本突变的一种，原作者在这里将其用作一个比喻。——中译者

② 此书分为两卷，书名为"Singularities and Groups in Bifurcation Theory"。第一卷已由施普林格出版公司于 1985 年出版。——中译者

了基本突变的数学理论。

对于汤姆来说，突变理论是一种生活方式，是数学哲学，而且随着时光的流逝，汤姆更加哲学化了。他曾反复重申，突变理论不是科学，从而也就不可能作为一种科学的理论来接受检验①。这种观点使得想用数学家们所熟悉的语言，来评价汤姆的思想之举，变得困难了。汤姆意义下的广义突变理论碰到的更大的危险，不是错不错的问题，而是有用还是没用的问题。

汤姆认为，奇点理论和基本突变只是突变理论的一小部分。在他看来，突变理论包括所有描述在光滑依赖于参数的对象族中，突发的变化是怎样发生的数学理论。例如，向量场的分歧理论就包括在内。不幸得很，只有光滑映射的奇点理论达到了汤姆预言的用途所需的数学完备性。由于惠特尼、马瑟、马格朗吉、阿诺尔德以及汤姆等人的工作，使得奇点理论成熟了。六十年代后期以来，突变理论本身已成为这个领域内很有启发意义的工作。没有人对汤姆在奇点理论的工作中所起的作用表示怀疑，但把突变理论看成哲学则是另一码事。因为这种看法在很大程度上具有推测的性质，所以就很难用一种使人心悦诚服的方式进行辩论。关于突变理论的大多数争论都是围绕齐曼的工作进行的。有鉴于此，本文的余下部分将集中到对齐曼的工作的批评上来。

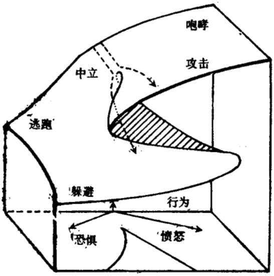


图 73

齐曼眼里的突变理论比汤姆眼里的突变理论要具体得多。讨论的重点放在作为不连续现象的模型的“基本突变”上。每个基本突变由一函数的一个退化程度较轻的奇点、该函数的一个展开(unfolding)以及通常是表示这个展开的函数族的临界点的轨迹组成。在大多数应用中，奇点为尖点，展开为函数族 $f_{u,v}(x)=x^4/4+ux^2/2+vx$，并且临界点的轨迹由方程 $x^3+ux+v=0$ 的解给出。上图是一个典型的图形。

① Thom, R.: Structural, Stability, Catastrophe Theory, and Applied Mathematics. SIAM Review 19,189—201(1977)

基本突变被齐曼用作股票市场上的暴跌或囚徒的骚乱等这样一些不连续现象的模型。展开族的参数称为控制变量，而展开族中单个函数的变量则称为状态变量。显而易见，控制变量或者是那些由实验控制的量，或者是那些比状态变量所表示的量变化要慢的量。临界点的轨迹就是平衡点的集合〔或者是在其上存在一个具有二个时标（time-scale）的向量场的慢速流形，就如同在心跳模型中那样。〕。如果控制变量的变化迫使一点越过由临界点的轨迹组成的曲面上的折迭，那么该点将落到这个曲面的另一叶上而控制变量仍保持不变。很明显地将基本突变中的变量与应用中的量等同起来，就得到了一个为不连续现象"适用的"模型。这些模型中的一些仅此而已，而有一些却增添了附加的结构。齐曼的社会科学模型和神经脉冲传播的模型提供了这两类模型的解释。

这些模型是齐曼从汤姆那里得来的，应用它们的根据是：基本突变提供的是对"一般状况的"不连续现象具有普适性的模型。若固定控制参数的个数为一小数目，则可能的模型的个数也为一小数目。这是很吸引人的，并且给应用"深刻而又强有力"的展开定理，来毫不费力地给出模型，而又无需对所考察的现象了解甚多，创造了机会。这听起来好得有点令人难以置信，从而促使人们以怀疑的口吻问道：这是否有效呢？

苏思曼抓住这个机会，给突变理论画上了巨大的问号。他批评齐曼，说其工作不过是错误的骗人把戏而已。他和查勒撰文对齐曼的一些文章进行了分析，指出他们断言的许多事情，或者是那些模型的错误的预言，或者是那些模型中错误的推理，或者只是分散读者注意力的花招罢了。然而，他们的态度很难说是不偏不倚的，再则他们的批评也并没有被普遍接受。当人们摈弃花言巧语来细察其攻击的实质时，就会问：批评本身是否也经得起他们对齐曼的工作所做的那种考查呢？在更详尽地处理所有批评之前，我们先考虑一个齐曼模型以及苏思曼和查勒对其所作的批评。

图 73 取自狗的攻击行为的模型。折迭的曲面表示狗的各种行为状态，诸如攻击、逃跑和躲避等。控制变量为愤怒和恐惧，而状态变量为狗的行为中攻击的程度。控制空间中的每一条道路导致的行为，就是把此道路提升到曲面的上部所预言的行为。当一道路在曲面的上部与折迭相遇时，狗的行为将发生突变而跳到曲面的下部上来。从躲避到攻击这种突发的变化是最富戏剧性的变化。齐曼断言：这个模型将使人们得以洞悉动物的攻击的双模态行为。尖点被强制地用来作为将单模态行为和双模态行为结合起来的最简

单的双参数模型。

苏思曼和查勒用多种方式对这类模型展开了批评。他们断言：阈(threshold)给出了双模态行为较之尖点模型更简单的模型；使用展开定理的全部威力来导出齐曼的结论，是多余之劳；齐曼需要强得多而不那么可靠的假设，来证明引入尖点模型是有道理的；这些模型之所以不正确，是因为在控制空间中存在着许多既可导致现实的行为又可导致非现实的行为的道路；齐曼的语言含糊不清，很难确定他确指的是什么。让我们更详细地逐条来考虑这些批评吧！

首先是文体的问题。齐曼的文章是以数学家和非数学家的混合体为读者的。为了引起一般读者的兴趣，他尽量避免使用数学术语，并且在模型的数学推导过程中还避免给出冗长的证明。这种做法对增强文章的可读性是有益的，但却促使人们批评齐曼说，从数学的观点来看，齐曼是粗心大意的——假设有时省略了，而且证明有时也不完备。如果对大多数数学家来说，省略的部分是显而易见的，那么这就不会是一个严重的问题。另一方面，如果齐曼的解说含糊不清，从而对其所说的必须加上大量的解释，那么就有更多的引起关注的因素。争议之一的要点是人们对齐曼文体上的省略所予以的评价。

文体的问题还以另一稍许不同的方式出现。在与广大的读者交流最新成就方面，数学界历来缺乏行之有效的方法，而文体上的严谨性又维护了这种隔阂。齐曼的著作流畅且趣味盎然，但却存在着明显的错误，而且苏思曼认为齐曼无法避开它。利用不具精确性的东西来欺骗读者，是危险的。作为一个向非数学家讲话的数学家，有以权威的身份说话的机会，而这是一个很易被滥用的机会。争论之第二个要点是：齐曼是否滥用了这样的机会？

> 你期望从专业哲学家那里得到清晰的东西，这使我感到非常诧异。在非数学家的哲学家的头脑里，模糊不清的概念和定义比其他任何地方都要多得多。看一看今天的哲学家谢林、黑格尔和爱森柏克之流吧！他们的定义难道不使你毛发倒竖吗？或者，你读一读古典哲学，柏拉图之类的"泰斗"们（我认为亚里士多德是例外）给出的定义不也一样吗？就是康德也常常不能做得更好一些：他对于分析命题和综合命题所作的区别，我相信，不是无聊的就是错误的。
>
> ——摘自高斯 1844 年 11 月 1 日给天文学家舒迈杰的信。

有一个齐曼反复重申并且与这些争论的要点有关的具体说明。在齐曼的

每一篇文章中，当引用汤姆的"深刻而又强有力"的展开定理，来证明引入基本突变之一作为模型是有道理时，它就会出现一次。即便有此说明，齐曼也并非就总是清楚地表述了他所做的允许使用展开定理的假设。省略的假设同陈述出来的假设一样是"似真的"吗？为了得到模型的那些他要用的性质，需要利用这个"深刻而又强有力"的结论也未必总是可信。是否齐曼欺骗读者，说在他的分析中存在着特别精细的东西，允许他从关于一个现象颇为似真的假设跳到他的特殊模型上来？若如此，这是否齐曼有意耍的花招或者他也骗了自己？

这些都是突变理论之争的核心问题。突变理论的魅力之一，就是利用深奥的数学来协助引入特殊的模型。如果齐曼是从神秘而非数学的角度，来拿尖点和蝴蝶作为股票市场上的暴跌和精神紊乱的模型，那么对这些模型的反应就可能不同了。他断言，由汤姆定理可知，这些模型并非特定的。这对吗？应用汤姆定理，需要建立一个背景。在此背景之下，可能的模型都由某空间上的光滑函数的一开集描述，并且这些函数的有关特征是：它们具有奇点理论意义之下的稳定性。但是，关于突变理论"应用"的文章却很少考虑这些要点的第一条。至少在一种情况（杜芬方程①的分歧）之下，对此事的疏忽从一开始就孕育了错误的答案。

争论之另一要点涉及对突变理论所作的断言——它乃是科学的最重要的革命。有时齐曼参考了非常古老的工作，但却只字不提那些提出了类似思想的文献。一个恰当的例子是，不用参考 van der Pol 方程和应用数学中流行的术语"松弛振动(relaxation oscillation)"或"双时(two timing)"，就在他关于心跳的论文中引入了"快速"流形和"慢速"流形这样的两个术语。这类忽略使人觉得，突变理论不是一种把想法变成几何语言的工具，而是提出了新的见解。撇开参考文献这一点，抹杀了那些在其他场合提出了这些思想的人的工作。从而，在那些笃信其言而自己又不去开辟应用领域的人中间，树立起了齐曼的形象和权威。缺乏对有关工作的了解不能成为这些省略的借口，除非那些工作是晦涩的或者是无法得到的。这恰恰是产生敌意的原因。

迄今为止，我们讨论了文体的问题。除此之外，人们还可问突变模型是否既正确又有用这样的问题。苏思曼指责齐曼的许多模型之所以是错误的，就在于它们所作出的预言是错误的。但是，允许人们对此问题作出判断的实

① Zeeman, E. C.: Selected Papers (1972—1977), Addison Wesley, 1977.

验数据却不易得到。不管是苏思曼还是齐曼，他们都没有深入到那些他们作了断言的学科中去。在关于导致一国向另一国宣战的一般条件的问题的论述上，人们会相信谁呢？各种各样争议之处的事实不易确定。齐曼对他赖以在其上建立模型的"事实"的普通接受程度并未作交待。他对其所用非数学的东西，采取的是权威的态度，而不去揭示与他的分析可能有关的实验结果。

这里更深刻的问题是关于所有数学模型的目的的问题。在我最熟悉的科学领域（理论生态学）中，我可以满有把握地断言：从大多数数学模型不能在实验误差所允许的范围内再现所考察的现象这一角度看来，它们都是"错的"。这是否意味着应该摈弃所有这些模型呢？一个模型应该达到什么样的标准，才能被认为是好的模型呢？同完全精确一样，这是一个效益的问题。即使一个模型不是完美无缺的，它对组织我们的思想和挖掘我们的假设的内涵也可有所帮助。如此说来，一个模型就是一个概念上的向导，就应该对其所依赖的实验背景反应敏感。那么，在这一点上，突变理论又做得怎样呢？

我首次遇到齐曼的许多模型，是在齐曼解说汤姆理论的讲演里。在这些讲演里，齐曼对这些模型作了生动的解释。把一个展开的临界点的轨迹，贴上表示鱼的地域性或狗的行为或英国选民的心情的变量的标签，只是生动地解释突变理论的丰富多采的手段。是否应该认真对待这些模型则是完全不同的另一回事。我认为，用尖点曲面去套不连续性的现象，不是一个概念上的重大突破。真正的问题是此后做什么。如果没有从此模型导出的似乎经受住了仔细考查而又不易从其他模型导出的特殊结论，那么我看，除了使读者不睡觉以外，它们是没有什么用处的。齐曼在他的许多论文中确实做了不少工作；但做得怎样又成了引起争论的话题。

对突变理论所作的总体断言超出了齐曼个人模型的实际效益和正确性。这些断言中的某些对有关领域前人的工作有轻侮之意。突变理论作为一场可与牛顿发明微积分相比拟的科学革命，受到了许多公众的注意，因此也给汤姆和齐曼带来了很高的声誉。注意本身就激发了争论。在广阔的范围内都给了数学以有限的注意，突变理论是否值得人们给以如此大的注意呢？此外，有这样一种感觉：如果突变理论够不上人们对其所作的断言，那么所有应用数学的重要性就都值得怀疑了。

这些就是我所见到的争议的主要类型。我并没有讨论争论之要点的实质含义，而且我还力图避免站在他们任何一方的立场上。最后，我来谈一谈我自己的看法。我个人对突变理论之争的感觉是，讨论大多没有抓住要害。即

使修改齐曼模型，以克服苏思曼对文体所作的批评中指出的不足之处，我也认为这些模型本质上并无区别。假设可增强或阐述得更清楚；列出有关工作的参考文献，可使读者对所研究的现象有更好的看法；还可详细述说数学在这些模型中的作用。尽管这样做可能会使得这些文章有点难读，也可能会使汤姆展开定理所作的贡献比它实际所奉献的要来得小，但我觉得这并不会损害齐曼工作的实质。然而，我仍觉得评价齐曼工作，是不舒服的。用基本突变理论来模拟不连续现象，给人们带来了新的见解，但并不像某些夸大其词的断言所暗示的那样，是放之四海而皆准的真理。

我觉得齐曼错得最严重之处，在于认定基本突变理论是所考察现象的合适的基础。这不是苏思曼详细阐述了的阈与突变相比较的问题，而是基本突变是否提供了"稳定性假设"的正确解释的问题。稳定性假设可以释义为：一个结构不稳定的模型是非现实的，因为实验误差或者随机波动都会改变它的定性的行为。"洛伦兹方程"漂亮地解释了此假设本身的局限性。洛伦兹方程是 $1R^3$ 中微分方程的一个系统，它的流(flow)严重地结构非稳定。这涉及两个互不相关的问题：(1) 集中注意力于现象的那些实验上可再现从而可模拟的方面；(2) 为研究所考察现象的一般状况性，提供合适的数学背景。在汤姆的书中，当他致力于力主从"动态(metabolic)"模型转变到"静态(static)"模型时，提供一个引入奇点理论的适当理由的困难就已出现。在应用中，在杜芬方程的分歧上所犯的愚蠢的错误，就明显地说明了要找到适当的背景，是困难的。一个有着丰富物理文献的更为精细的例子是相位移的理论。在那里，突变理论的模型称为朗道模型。自瓦尔斯发明该模型到现在，已有一个纪世之久了。它给出了错误的答案也是周知的。有一些物理理论做得更好一些，但却要复杂得多。即便是在上面讨论过的弹性结构的稳定性的十拿九稳的应用中，对这些事情谨慎小心也还是必要的。

突变理论可能使人误以为，一件刚开始做的工作就已完成了。这种欺骗性是基本突变理论的应用中必将面临的最严重的问题。对描述不连续性的数据套用尖点模型这种方法自身，并不比在两个量之间"建立"一个线性关系的最小二乘法，能提供更多的信息。

附录二　射线系的奇点[①]

B. И. 阿诺尔德

射线系的最简单例子就是欧氏空间中给定曲面的所有法线组成的系。哈密顿在 1824 年把射线系的理论转化为了辛几何的一部分；自1965年马斯洛夫的学位论文之后，射线系就都称为拉格朗日子流形了。

一个曲面的所有法线是该曲面的某个邻域的叶状结构；但在那个邻域之外，各条法线开始相互相交(图74)。由此而产生的复杂且又优美的几何，直到 1972 年发现了射线系的奇点和欧氏反射群之间的关系，才得以知晓。

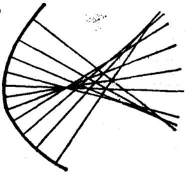


图 74

这个关系，并无什么先验理由，结果却成了奇点分析的一个强有力的方法。到 1978 年为止，已经知道欧氏反射群也支配着惠更斯渐伸线的奇点。

惠更斯在 1654 年发现，平面曲线的渐伸线在与该平面曲线相接触的每一点上都有一尖点型奇点(图75)。平面曲线的渐伸线以及它们的高维推广都是带边流形上的波阵面。不仅射线系的奇点，而且波阵面的奇点，也都由反射群来分类。

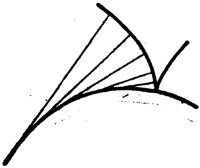


图 75

虽然无边流形上的射线系和波阵面系是与魏尔群的 A、D、E 序列有关的，但是渐伸线的奇点却是由 B、C、F 序列（它们的登肯图具有双重联络）来

① 原题：Singularities of Ray Systems. 译自：Proceedings of the International Congress of Mathematicians, August 16—24, 1983, Warszawa vol. 1. North Holland 1984, pp. 27—49。——中译者

描述的。

直到前不久都未弄清余下的反射群($I_2(P)$，H_3，H_4)与奇点理论的关系。自从1982年的秋天，发现群H_3(二十面体的对称群)支配着平面曲线的拐点上的渐伸线系的奇点，情况才有了转机。

就像二十面体神秘地出现在行星距离的开普勒定律中一样，二十面体也神秘地出现在拐点上。然而，我相信，二十面体与我们的问题的联系比其与开普勒定律的联系要紧密；我希望，余下的群H_4将自然地出现在射线系和波阵面的更复杂的奇点的分析中。

本文的主题是射线系的奇点和反射群之间关系的应用。我将讨论的这些结果，现在都归属于拉格朗日奇点理论和勒让德奇点理论的名义之下的辛几何和接触几何。但是，人们也可以把它们看作是变分法的一部分，或者是控制论的一部分，或者是偏微分方程理论的一部分，或者是经典力学的一部分，或者是光学的一部分，或者是波理论的一部分，或者是代数几何的一部分，或者是一般奇点理论的一部分。这些结果中的一些处理的对象这样基本，以致看来奇怪的是经典科学竟把它们给遗漏了。例如，在1981年才得到位于一般位置的曲面在通常的三维空间中的投影的局部分类。

不等价的投影芽共有十四类：当从三维空间的各个点来看一般状况的曲面时，一般状况的曲面上点的邻域恰好生成十四种不同的模式。

经典科学遗漏了这些结果的原因，也许是在证明上有困难：这些结果依赖于它们与不变量理论、李代数、反射群、代数几何以及狄林格(Delinge)的混合霍奇(Hodge)结构等的(有时是出乎意料的)种种联系。这些结果中的一些得自奇点理论在哈密顿动力系统的扰动分析中的应用，甚至在数论中的应用的启发，但大多数新概念却是来自三维欧氏空间中越过障碍的问题。

为了描述这些新结果，我必须回忆一些熟知的概念。

1. 辛几何

偶数维光滑流形上的一个辛结构，就是该流形上一个闭的非退化的二阶微分形式。

几个实例：1. 有向面积元定义了平面上的一个辛结构。2. 辛流形的直积有一个自然的辛结构。3. 经典力学的相空间(光滑流形的余切丛的全空间)有一个自然的辛结构“$dp\wedge dq$”。4. 人们可以把欧氏空间中有向直线组成的流形，配上球面的余切丛的全空间的辛结构。因为这两个流形是微分同

胚的。5.辛流形的超曲面的一点上的特征方向，就是该点的切平面的斜正交补。一个超曲面上的特征就是该曲面的特征方向组成的场的积分线。特征组成的流形从原来那个流形继承了一个辛结构。6. 特别有，一般变分问题的极值曲线组成的流形，位于哈密顿函数的同一个等高流形上，配有一自然的辛结构。7. 考虑所有奇次二元形式组成的空间。在这个偶数维的线性空间上，存在一个唯一的（相差一个常数因子）非退化的、SL_2 不变的双线性斜形式。这个形式在此二元形式空间上定义了一个自然的辛结构。8. x^{2k+1} 的系数等于一的、x 和 y 的二元形式，在所有形式组成的空间中作成一个超曲面。这个超曲面的特征组成的流形，可与 x 的形如 $x^{2k}+\cdots\cdots$ 的偶次多项式组成的流形等同起来。因此，我们给这个偶次多项式组成的空间配上了一个辛结构。9. 沿 x 轴的移位(shift)组成的单参数群保持这个辛结构。希尔伯特在 1893 年就已知道，这个群的哈密顿函数是一个次为二的多项式。这个哈密顿函数的等高超曲面的特征组成的流形，可与根之和等于零的多项式 $x^{2k-1}+\cdots\cdots$ 组成的流形等同起来。因此，在这个多项式的空间上有了一个自然的辛结构。

定理（达布，1882 年）。维数固定的流形上的所有辛结构都是局部微分同胚的。

因此，在适当选择的局部"达布坐标"p_i、q_i 之下，每个辛结构都可局部地简化为规范形 $\Sigma dp_i \wedge dg_i$。

现在，我们来考虑辛流形的子流形。辛流形的辛结构在其子流形上的限制是闭的二阶形式，但却不一定是非退化的。在欧氏空间中，不仅仅有子流形的内在几何学，而且还有庞大的外曲率理论。而在辛情形下，情况却要简单得多：

定理（吉文塔利，1981 年）。辛流形的子流形的芽，是由辛形式在该子流形的所有切空间上的限制决定的（在辛微分同胚的意义下）。

威恩斯坦恩在 1973 年证明了一个处理与子流形不相切的向量的尚不完美的定理。因为与威恩斯坦恩定理不同的是，吉文塔利定理蕴涵了辛空间中一般状况的子流形的芽的分类：人们一直在使用由马蒂雪及其学生们在 1970 年得到的辛结构的退化性的分类。

几个实例：1. 辛流形中二维的一般状况的曲面的芽，都局部辛微分同胚(symplectomorphic)于曲面 $p_2=p_1^2$、$q_1=0$、$p_3=q_3=\cdots=0$ 的芽（我们用的是达布坐标）。2. 在四维子流形上，人们可以稳定地遇到有马蒂雷椭圆型

奇点和双曲型奇点的一些曲线，这些曲线的规范形是

$$p_2 = p_1 p_3 \pm q_1 q_2 + q_3{}^3/6, p_3 = 0, p_4 = q_4 = \cdots = 0.$$

椭圆性和双曲性关系到在与子流形有内在联系的动力系统中运动的特性。三维流形上有关的散度自由（divergence-free）的向量场，有一条由奇异点组成的曲线。结果，奇异曲线上的分类没有奇异点上的分类那么病态（后者的困难程度几乎与建立整个天体力学相同）。

因此，我已经初步描述了光滑子流形的辛奇点理论。

辛流形的拉格朗日子流形就是这样的子流形，辛结构在其上的限制消失了，并且其有尽可能高的维数（等于此辛流形的维数的一半）。

几个实例：1．余切丛的纤维。2．欧氏空间中（任意维的）光滑子流形的法线组成的流形。3．可被x^m整除的所有多项式$x^{2m}+\cdots\cdots$组成的集合。

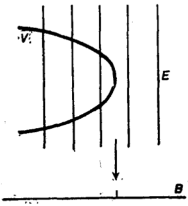


图 76

拉格朗日纤维化就是每个纤维都为拉格朗日子流形的纤维化。

几个实例：1．余切丛。2．将欧氏空间中的有向直线送到原点上对应的单位向量的纤维化。

给定维数的所有拉格朗日纤维化都是局部辛微分同胚的（在全空间的每个点的邻域内）。

一个拉格朗日映射就是一个图表$V\to E\to B$，其中第一个箭头为拉格朗日子流形的浸入，第二个箭头是拉格朗日纤维化（图 76）。

几个实例：1．梯度映射：$q\to\partial s/\partial q$。2．法映射：将欧氏空间的一个子流形的每个法向量对应于该向量的端点。3．高斯映射：将欧氏空间中一个横截地有向的超曲面的每个点，对应于原点的一个单位向量，这个向量的方向就是该点的法方向（相应的拉格朗日流形由该超曲面的法向量组成）。

拉格朗日映射之间的一个等价关系，就是它们的纤维化的全空间之间一个保持纤维的辛微分同胚，它将第一个拉格朗日子流形映满第二个拉格朗日子流形。

一个拉格朗日映射的所有临界值组成的集合称为它的焦散。等价的拉格朗日映射的焦散是微分同胚的。

实例：一个曲面的法映射的焦散就是该曲面的法线的包络，即该曲面的焦散面——曲率中心组成的曲面。

每个拉格朗日映射都局部等价于一个梯度映射（一个法映射、一个高斯映射）。一般状况的梯度映射(法映射、高斯映射)的奇点，都等价于一般状况的拉格朗日映射的奇点。这些奇点都由欧氏反射群A、D、E来分类。

实例：考虑靠惯性运动的尘土状粒子的介质，粒子的速度形成一势场。经过一个时间间隔t之后，粒子从x运动到了$x+\partial ts/\partial x$。于是，我们得到了光滑映射$R^3\longrightarrow R^3$的一个单参数族。

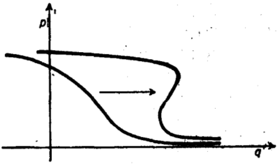


图 77

这些都是拉格朗日映射。的确，速度的一个势场定义余切丛的一个拉格朗日截面。牛顿方程的相流将初始拉格朗日流形送到一些新的拉格朗日流形，但这些拉格朗日流形却不一定是截面（对于大的t）：它们在底空间上的投影可能有奇点（图 77）。这些映射的焦散都是在那些粒子的密度为无穷大的地方。根据泽利多维奇 1970 年的结果，一个类似的模型(考虑了宇宙的万有引力和膨胀)描述了宇宙中物质分布的大范围不均匀性是怎样产生的。

由拉格朗日奇点理论可知，新生成的焦散形若一个茶碟（在其形成之后的时刻t，茶碟的轴的阶为$t^{1/2}$，深度的阶为t，厚度的阶为$t^{3/2}$）。茶碟的生成对应于A_3。三维空间中拉格朗日映射的一般状况单参数族的焦散的所有变态，都绘在图 40 和图 41 中（1976 年）。

定理（1972 年）。维数$\leqslant 5$的流形之间的一般状况的拉格朗日映射芽，在每点都是稳定而又简单的(没有模数)。如下面所解释的那样，简单而又稳定的拉格朗日映射芽是由欧氏反射群A、D、E来分类的。

2. 接触几何

奇数维光滑流形上的一个接触结构，就是其切空间中超平面组成的一个非退化场。由"达布的接触定理"可知，"非退化"的确切意思就是不相关：在

一般状况点的邻域内，维数固定的奇数维流形上的所有一般状况的超曲面场都是微分同胚的。

几个实例：1．光滑流形的接触元组成的空间，是由其所有的切超平面组成的。一个接触元的速度属于定义接触结构的超平面，当且仅当其接触点的速度属于该元素。2．函数 $y=f(x)$的一个阶导网（jet）组成的空间有一自然的接触结构 $dy=pdx$（对于$y=f(x)$在x的一阶导网，$p=\partial f/\partial x$）。

接触空间的子流形的外在几何局部由其内在几何决定，即由该子流形的所有切空间上所有接触结构的迹决定（吉文塔利的接触定理）。

接触流形的一个积分子流形说是勒让德的，如果它有尽可能高的维数。

几个实例：1．与一固定的（任意维的）子流形相切的所有接触元组成的集合。2．特别有，给定点上的所有接触元形成一个勒让德流形（接触元组成的丛的纤维）。3．一个函数的所有一阶导网组成的集合。

一个纤维化说是勒让德的，如果它的纤维都是勒让德子流形。

几个实例：1．射影余切纤维化（把接触元送到它的接触点上）。2．一个函数在其零阶导网（去掉各阶导数）上所有一阶导网的纤维化。

给定维数的所有勒让德纤维化（在全空间的每点上）都是局部接触微分同胚的(contactomorphic)。

把勒让德子流形投影到勒让德纤维化的底空间上的投射，称为勒让德映射。它的象称为面(front)。

几个实例：1．勒让德变换：射影空间中的超曲面可以作为勒让德子流形提升到其接触元组成的空间中去。所以，射影空间的接触元组成的流形是其对偶射影空间上的一个纤维化（把每个接触元对应于包含它的那个超平面）。这个纤维化是勒让德的。投射将提升上去的勒让德流形映到一个超曲面上，这个超曲面是原来那个超曲面的射影对偶。因此，一个光滑超曲面的射影对偶就是一个勒让德映射的面。2．等距映射：在欧氏空间中的一个超曲面的每条有向法线上，（沿法线）在与该超曲面相距 t 的地方选一点，我们就得到了一个勒让德映射。这个勒让德映射的面与此给定的超曲面是等距的。

可与拉格朗日情形类似地定义勒让德等价关系、稳定性和简单性。

每个勒让德映射都局部等价于一个由勒让德变换定义的映射，局部等价于一个等距映射。因此，局部的勒让德奇点理论无异于勒让德变换（或者等距映射，或者波阵面）的奇点理论。

定理（1973 年），维数$\leqslant 5$的流形的一般状况勒让德映射芽，在每一点

上都是稳定而又简单的。勒让德映射的简单的稳定芽都由欧氏反射群 A、D、E来分类：勒让德映射的面都全纯等价于对应的反射群的奇异轨道组成的簇。

实例：三维空间中一般状况波阵面的奇点都是(半立方的)尖脊(A_2)和燕尾(A_3，图 78：在这些点上，波阵面微分同胚于由这样的多项式x^4+ax^2+bx+c组成的空间中由有重根的多项式组成的曲面)。

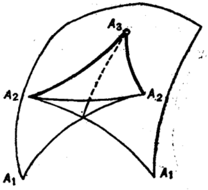


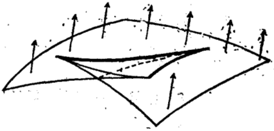
图 78

附注：上述定理中复化的必要性表明，欧氏反射群可能有不同的实形式。

所有拉格朗日奇点都可从勒让德奇点构造出来。为了得到这个结论，考虑函数的一阶导网组成的空间的勒让德子流形。通过去掉函数的值，将此导网空间投影到相空间上。其中，勒让德流形的芽都同构地投影到拉格朗日流形的芽上。例如，一个拉格朗日映射的焦散就是某个勒让德映射的面的尖脊在纤维为一维的一般状况的投射之下的投影。

定理(利雅施科，1979 年)。横截于简单奇点的面的所有全纯向量场，都可用保面 (frontpreserving)的全纯微分同胚芽，将其中的一个映满另一个。

实例：在燕尾 $\{x^4+ax^2+bx+c=(x+a)^2+\cdots\}$ 的"大多数奇异点"的邻域内，一般状况的向量场都可用保燕尾的微分同胚简化为规范形$\partial/\partial c$(图79)。


图 79

用保波阵面或保焦散的微分同胚，将各种几何对象简化为规范形，是射线系和波阵面的几何学中的主要技术工具。例如，运动着的波阵面的变态的研究，就是基于一个与利雅施科定理"对偶"的结果。

定理(1976 年)。在简单奇点的面的"大多数奇异点"上等于零的所有一般状况全纯函数，都可用保面的全纯微分同胚芽，将其中的一个映满另一个。

实例：在燕尾的大多数奇异点上的一般状况函数，都可用保燕尾的微分

同胚，将它简化为规范形 a + 常数。

上述定理是从等变 (equivariant) 莫尔斯引理推出的。我们这样来使用这个定理。运动着的波阵面在时空中形成一个"大波阵面"。用保大波阵面的微分同胚，将时空中的时间函数简化为规范形，我们就得到了运动着的波阵面的变态的规范形式。

保面的无穷小微分同胚都是与面相切的向量场。这种无穷小微分同胚的研究，导致对欧氏反射群的不变量上的"对合算子"的研究。这个算子将一对不变量（即轨道空间上的函数的不变量）对应于一个新的不变量——那些（从轨道空间提升到欧氏空间的）给定函数的梯度的数积。

这个算子的线性化就是与轨道空间在 0 点余切的空间上的一个双线性对称算子。

定理（1979 年）。欧氏反射群的不变量的线性化了的对合算子，等价于对应的奇点的局部代数上的算子 $(p, q) \to S(p \cdot q)$，其中 $S = D + (2/h)E$，h 为科克希契数，D 为欧拉拟齐性求导。

对于例外群，吉文塔利证明了这个定理。在 1981 年，他与瓦尔琴科合作，把这个定理推广到了更高的拟齐性奇点上。在这个推广中，他们将欧氏结构代之以一个适当的非退化周期映射的相交形式(intersection form)，而这个周期映射是从定义在与函数的通有形变(versal deformation)相应的米尔纳纤维化的纤维上的一族全纯微分形式产生出来的。非退化相交形式（根据其函数的变量的个数的奇偶性）或者确定了一个在勒让德面上有标准奇点的局部平坦的伪欧氏度量，或者确定了一个可全纯地延拓到面上的辛结构。

实例：因此，最高次项系数等于一而且根之和等于零的奇次多项式组成的集合，配上了一个新的辛结构。双重根的个数尽可能大的多项式组成的簇是一个拉格朗日子簇。

3. 拉格朗日奇点和勒让德奇点的应用

这个理论首先发展起来的是用稳衡相方法(stationary phase method)来研究振荡积分的渐近线。我不打算在这里详细讨论这些（非常重要的）应用，但着重提一提：(1) 瓦尔琴科(1976)年关于用相函数的牛顿边界描述振荡积分的主项的指数的公式的证明；(2) 由同一个作者给出的这个指数的非半连续性的一个例子；(3) 卡尔普什金（1981 年）关于双重振荡积分的一个对于参数是一致的上估计的证明（对于简单的振荡积分，这样一个估计是由维

诺格拉朵夫得到的，但对于三重振荡积分，瓦尔琴科的非半连续性的例子却说明不存在这样的估计）。

这个一致估计，对于参数的个数为一个很小的数 l 的一般状况的函数族的所有成员，也成立（杜斯特马特在 1974 年、弗狄叶拉在 1977 年和卡尔普什金在 1982 年，分别对 $l\leqslant6$、$l\leqslant7$ 和 $l\leqslant9$，证明了这个结论）；$l=73$ 太大（在此时瓦尔琴科的上述例子起作用了）。

瓦尔琴科为了研究复域上振荡积分的渐近展开，构造了一个混合霍奇结构，他称之为渐近结构。他证明这个渐近结构的霍奇数与斯丁伯林克在 1976 年代数地构造的混合霍奇数一致。瓦尔琴科的理论的推论包括有：(1) 这个霍奇结构的不变量沿"μ = 常数"的层(stratum)的恒性(constancy)；(2)拟齐性函数的"内模态"(inner modality)与它们的真实模态一致的事实。在实代数几何中，这个混合霍奇结构给出了彼得罗夫斯基-奥列依尼克不等式的一些推广。

定理(1978 年)。中间的霍奇数是 R^{2n} 中梯度向量场的局部彭加勒指标的上界，$|ind|\leqslant h_1^{n,n}$。

奇点的混合霍奇结构将函数的一个有限重临界点对应于有理数的一个有限集——该临界点的谱。这个谱的左端是具有一(沿复链的)给定的相函数的振荡积分的最小指数。这些实例不仅显示了这个指数的半连续性，而且也显示了所有其它的谱点的半连续性。例如，通过一个将重数降低了一的形变得到的谱，(以与一个椭球的轴分解初始椭球的轴的相同的方式) 分解初始谱。

利用在与谱的半连续性猜测(1978 年) 表面上毫不相关的一个代数几何问题——CP^n 中次为 d 的超曲面上(莫尔斯)奇异点的数目可以有多大?——上的工作，最近证实了这个猜测。

布鲁斯在 1981 年给出了一个上估计，(对于 CP^3 中的曲面)这个估计的渐近展开为$d^3/2+\cdots\cdots$(契穆托夫在1983年得到，最优下估计的阶为 $3d^3/8$)。比较最早确知的带混合霍奇结构的那些答案 (0,1,4,16,31,64)，我提出了下述

猜测：奇异点的个数不会超过立方体$(0,d)^n$ 中整点的个数 m，关于它有 $(n-2)d/2+1\leqslant\Sigma mi\leqslant nd/2$。

对三维空间中的曲面，这个猜测蕴涵了一个上估计 $23d^3/48+\cdots\cdots$。吉文塔利在试图证明这个猜测的过程中，在 1982 年 10 月改进了布鲁斯估计

中的低次项。他的证明用了一些雷利-费雪-库朗（Rayleigh-Fisher-Courant）型不等式，澄清了此问题与谱的半连续性猜测的关系。

瓦尔琴科把关于霍奇结构的极限的斯丁伯林克（1976年）定理直接应用于这个问题。于是，他既证明了关于奇异点个数的估计的猜测，又证明了谱的半连续性（后者是对用添加低权的多项式的方法生成的拟齐性函数的形变证明的）。他还用同样的方法证明了，所有三个变量的函数的谱的左端的半连续性，以及"偏离"（"far away"）牛顿多面体的 n 个变量的函数的谱的左端的半连续性。

我还要提一提拉格朗日奇点在机械求积理论即大区域里整点的问题中的应用。设 V 为欧氏空间 R^n 中边界光滑的区域 G 的体积，$N(\lambda)$ 为 λG 里整点的个数，$R(\lambda)=\lambda^n V-N(\lambda)$。由拉格朗日奇点理论可推出下述结论：

定理（弗狄叶拉，1977年）。对于 $n\leqslant 7$，一般状况地有

$$|R(\lambda)|\leqslant C\lambda^{n-2+2/(n+1)}。$$

定理（瓦尔琴科，1981年）。在由旋转和移位从整点格得到的所有格上的平均数 $|R(\lambda)|^2$ 不会超出 $C\lambda^{n-1}$。

兰多尔在1969年研究了凸解析情形。根据大数定律，指数 $(n-2)/2$ 是人们所希冀的（如果 λ^{n-1} 个方格被边界独立地分离）。前面那个定理的证明，是受了杜斯特马特1974年关于马斯洛夫"正则算子"（canonical operator）的酉性的证明的启发。

奇点的牛顿图的统计导致了另一个与整点有关的不等式的出现。

定理（塞瓦斯蒂亚诺夫，科尼亚金，1982年）。R^n 中体积为 V 的、顶点都是整点的凸多面体顶点的个数，不会超过 $CV^{(n-1)/(n+1)}$（对于任意维面的个数也有一个相同的估计）。

边界上的拐点对整点个数的渐近展开的余项的影响，是整点与 R^n 的光滑结构之间的相互关系的一种特殊情况。这些相互关系对于微积分的许多分支来说极为重要。

例如，由系数为不太大的整数的方程定义的超平面，逼近子流形的典型点的阶，对于非线性振荡理论中的共振现象来说是至关紧要的〔快频流形的扁率（flattening）延长了共振的持续时间〕。

涅河罗雪夫在其关于哈密顿系统的行为变量的发展的研究中，引入了未扰动的哈密顿函数的"最速（steepness）指数"。一般状况的哈密顿函数的这些指数的计算，引发出了切性奇点（tangential singularity）的理论。

4. 切性奇点

这些都是射影曲面关于其所有维数的切空间的排列的奇点。

实例：普拉托诺瓦和朗吉斯在 1979 年找到了三维空间中一般状况的曲面上点的切性分类(tangential classification)(图 80)。抛物点组成的曲线(p)将这种曲面分为椭圆点组成的区域(e)和双曲点组成的区域(h)。区域(h)包含了由渐近线的拐点组成的曲线(f)，在曲线(f)上有双重拐点(b)、自相交点(c)以及与抛物曲线(p)相切的切点(t)。

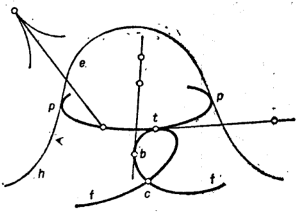


图 80

这个分类对涅河罗雪夫的指数估计和投影退化的分类都很有用。

定理（普拉托诺瓦，O. П. 什尔巴克，1981 年）。把 RP^3 中的一般状况曲面，沿过射影中心（一个在该曲面外的点）的直线，投影到平面上。

于是，所有这些投影都局部等价于十四个曲面 $Z=f(x,y)$ 沿 x 轴的投影，其中 f 由下表给出

$$x, x^2, x^3+xy, x^3\pm xy^2, x^3+xy^3, x^4+xy,$$
$$x^4+x^2y+xy^2, x^5\pm x^3y+xy, x^3\pm xy^4, x^4+x^2y+xy^3,$$
$$x^5+xy。$$

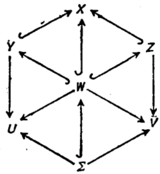
这里的投影都看作是由嵌入和纤维化组成的图表 $V\to E\to B$，而等价关系都是 3×2 的图表，并且这些图表的竖行都是微分同胚。

关于一般状况的中心的投影仅有的奇点是惠特尼折迭和尖点（沿每条渐近射线可看到一个尖点）。其它奇点需要从特殊方向观察才能得到。投影的规范形只有有限多个（因而可见轮廓的规范形也只有有限多个）这一事实，并不是不证自明的。因为在曲面在平面上的投影的一般状况三参数族中，存在一个不等价的奇点组成的连续统。

借助于辛几何和接触几何，相切的等级可变得更清楚。梅尔罗斯在1976

年指出，欧氏空间中曲面的切射线几何，依赖于辛相空间中的两个超曲面：第一个描述度量，第二个描述曲面。

同一对超曲面还描述了渐近切线的等级。于是，我们可以将关于通常空间的曲面的几何学的大部分，转变为辛空间或接触空间中任意的超曲面对(hypersurface pairs)这个一般情形，进而利用曲面理论的几何直观来研究带单边相约束的一般变分问题。



设 Y 和 Z 是辛空间 X 中的两个超曲面，并且它们沿子流形 W 横截相交。将 Y 和 Z 分别投影到它们的特征流形 U、V 上，我们就得到了一个六边形图表。这里 Σ 是从 W 到 U 和从 W 到 V 这两个投射的临界点组成的(公共)流形。

实例：设 $x=\{q,p\}$ 是一个欧氏自由粒子的相空间（q 为粒子的位置，p 为粒子的动量）；Y 是单位向量($p^2=1$)组成的流形；Z 是边界向量（q 属于超曲面 Γ）组成的流形。则 U 是射线空间，V 是 Γ 的切丛空间，W 是单位边界向量（不必是切向量）的丛空间，Σ 是球面的切丛空间。

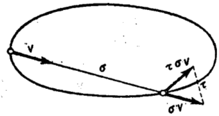


图 81

两个投射 $W\to U$ 和 $W\to V$ 在非渐近单位切向量上的奇点都是惠特尼折迭。这两个投射中的任何一个都定义了一个 W 上的对合变换，而且这个变换在 Σ 上还是恒等变换。

实例：我们在凸平面曲线的单位边界向量组成的流形 W 上，已经定义了两个对合变换 σ 和 τ (图 81)。这两个对合变换的积就是伯克霍夫(1927 年)的台球变换(billiards transformation)。

梅尔罗斯曾利用这对对合变换，通过 C^∞ 的辛微分同胚，来把辛空间的超曲面对简化为局部规范形〔在解析情形中所得的序列都是一般状况地发散的，关于共振的动力系统的埃卡尔（1975 年）理论和沃罗宁(1981 年)理论中的情况也是这样的〕。

在更复杂的奇点上（例如，在渐近的单位向量上），辛空间的超曲面对有

模数。然而，对于第一个超曲面是折迭的两个退化，人们(至少形式上地)可以将由第一个超曲面和相交组成的对简化为简单的规范形。因此，我们可以研究这样的映射的奇点了，这种映射将一般状况渐近的或双重渐近的单位向量上的单位边界向量对应于射线。

这种映射的临界值组成的簇局部微分同胚于通常的燕尾和一个线性空间的积。这种簇以标准的方式位于直线组成的辛空间中：

定理 (1981 年)。上面所述的临界簇的点上的所有一般状况辛结构，都可用保临界簇的形式的微分同胚(critical-variety-preserving formal diffeomorphism)，将其中的一个局部地化为另一个。

在双重渐近射线上，切射线组成的簇局部微分同胚于一个燕尾和一条直线的积。所以，上述定理描述的是切射线组成的簇的辛几何。

5. 障碍问题

考虑欧氏空间中边界为光滑曲面的一个障碍。障碍问题需要研究的是，在绕过此障碍的所有道路中，从空间中一点到一固定的始集的长度最短的道路的奇点。这样一个简单的带边流形上的变分问题，甚至对三维空间中一般状况的障碍，也未能解决。

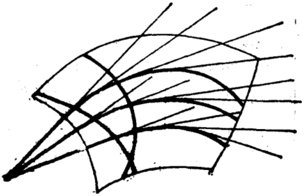


图 82

这个最短道路由一些直线段和此障碍曲面上的测地线段组成(图 82)。因此，我们来考虑与一固定的面垂直的测地线组成的系。与这些测地线相切的所有射线组成的系，是所有射线组成的辛空间中的一个拉格朗日簇(变分问题的极值曲线组成的每一个系也都是如此)。在带边流形上的所有通常的变分问题中，有关的拉格朗日簇总是光滑的(即使出现焦散也不例外)。但在障碍问题中，有关的拉格朗日簇却可能有奇点。上述定理蕴涵下述

推论 (1981 年)。一般状况障碍的问题中的拉格朗日簇，在一般状况的

渐近射线上有一半立方的尖脊，在双重渐近射线上有一"开燕尾"型奇点。

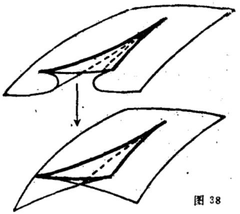


图 38

开燕尾就是四维空间 $\{x^5+Ax^3+Bx^2+Cx+D\}$ 中由至少有三重根的多项式组成的曲面。多项式的微分将开燕尾映满通常的燕尾。开燕尾上没有了自相交的线但仍然有尖脊(图 38)。

定理 (1981 年)。波阵面的尖脊在三维空间中一般状况地运动，就在时空里(在焦散的通常的燕尾的上方)形成一个开燕尾。

定理(О. П. 什尔巴克，1982年)。考虑一个一般状况的空间曲线的单参数簇，并且假设对于(时间的)参数的给定值，这族曲线有类型为 1、2、5 的双倍平坦(biflatness)的点。则这簇曲线的射影对偶曲线形成时空中的一个曲面，这个曲面局部微分同胚于开燕尾。

开燕尾是奇点的一个大的序列中的第一个代表。考虑多项式 $x^n+\lambda_1x^{n-2}+\cdots+\lambda_{n-1}$ 组成的空间中根的余重数(comultiplicity)固定的多项式 $((x-a)^{n-k}(x^k+\cdots\cdots))$ 组成的集合。多项式的微分保持根的余重数不变。

定理(吉文塔利，1981 年)。随着次数 n 的增加，从 $n=2k+1$ 开始(即在自相交曲线解体的那一刻)，根的余重数固定的多项式组成的簇的序列稳定化了。

实例：开燕尾是通常的燕尾上第一个稳定的簇。

下述吉文塔利的三元组理论(1982 年)使得障碍问题中开燕尾的出现形式化了。

定义：一个辛三元组$(H,\ L,\ l)$由辛流形中的一个光滑超曲面H，与H(第一阶)相切的一个拉格朗日流形L以及拉格朗日流形的一个超曲面l组成。

由辛三元组$(H,\ L,\ l)$生成的拉格朗日簇为l在H的特征流形中的象。

例 1. 在边界为$\Gamma\subset R^n$的障碍问题中，我们把沿Γ的测地线到初始面的距离看成是一个函数$S:\Gamma\to R$。一阶形式ds的所有那些从Γ到IR^n的扩张组成的流形L，加上超曲面$H:p^2=1$，形成一个三元组。

这个三元组恰好生成由与我们的极值线系在Γ上的测地线相切的射线组成的簇。

例 2. 考虑次数d为偶数$2m$的多项式$F=x^d+\lambda_1x^{d-1}+\cdots+\lambda_d$组成的

辛空间。那些可被 x^m 整除的多项式形成一个拉格朗日子流形 L。设 h 是沿 x 轴的移位的哈密顿函数。(这个 λ 的多项式为 $h=\Sigma(-1)iF^{(i)}F^{(j)}$, $i+j=d$, $F^{(i)}=diFi/dxi$。) 超曲面 $h=0$ 沿由可被 x^{m+1} 整除的多项式组成的L的超曲面 l，与拉格朗日流形L相切，因而(h,L,l)是一个辛三元组。

由这个三元组生成的簇就是维数为 $m-1$ 的拉格朗日开燕尾(有一根的重数大于次数的一半的多项式 $x^{d-1}+a_1x^{d-3}+\cdots+a_{d-2}$① 所成之集)。

定理(吉文塔利，1982 年)。例 2 中的三元组是稳定的。一般状况的辛三元组在所有点上的芽，都辛等价于例 2 中的辛三元组在所有点上的芽。

推论。与一般状况的障碍问题中极值线组成的系的测地线相切的射线组成的簇，局部辛等价于拉格朗日开燕尾。

在接触几何中有二类勒让德簇与障碍问题有关：面的接触元组成的簇和多值时间函数的一阶导网组成的簇。第一类的簇一般状况地都是勒让德开燕尾，勒让德开燕尾就是微分同胚地提升了的拉格朗日开燕尾。第二类的簇都是第一类的簇上的柱面。

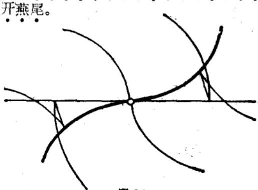


图 84

实例：考虑边界为一条有通常的拐点的平面曲线的一个障碍。勒让德映射的面都是此曲线的渐伸线。在这些渐伸线上有两种奇点：在此障碍的边界曲线上的 (阶为 3/2 的) 通常的尖点和在边界曲线的拐点的切线上阶为 5/2 的奇点(图 84)。这里的勒让德簇在此障碍的边界曲线的一般状况点上是非奇异的，但在拐点的切线的点上却有阶为 3/2 的尖脊。

我们来考虑平面接触元组成的三维空间(它是该平面上的一个纤维化)。一般状况曲线的所有渐伸线的所有接触元在这个三维空间中形成一个曲面。我们还考虑所有多项式 x^3+ax^2+bx+c 组成的三维空间 (它是这些多项式的导数组成的平面上的一个纤维化)，其中所有那些有重根的多项式在这个三维空间中形成一个曲面。

定理(1978年)。上述第一个曲面在一般状况曲线的拐点的切线上的芽，保纤维地微分同胚于上述第二个曲面在零点的芽。

① 此处原文误为 $xd^{-1}+a_1xd^{+3}+\cdots+c_{d-2}$。——中译者

这个曲面(图 85) 与代表在障碍的边界点上的那些平面接触元组成的曲面$C=0$一起,形成反射群B_3的奇异轨道组成的簇。这个结果导致了边界奇点理论的出现(1978 年),对此我只提一提下述内容。

实例(И.Г.什尔巴克, 1982 年)。考虑三维欧氏空间中一个一般状况的曲面上的一条一般状况曲线。这条曲线在一些点上与此曲面的曲率线相接触。由边界的拉格朗日奇点理论可知,这种情况由魏尔的例外群F_4支配:此曲面的焦集和此曲线的焦集与此曲面的在此曲线的点上的所有法线的并,形成一个局部微分同胚于F_4的焦散的簇。

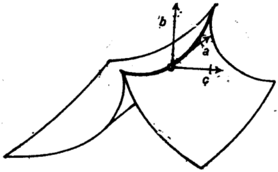


图 85

由边界拉格朗日奇点理论可推出一个有趣的"拉格朗日对偶性",这个对偶性是说一个函数在其所在的空间中的奇点可与该函数在边界上的限制的奇点互换,它是"拉格朗日乘数法则"的一种现代化了的形式 (И.Г. 什尔巴克,1982 年)。

现在回到平面曲线的拐点上来,考虑障碍问题中的 (多值) 时间函数的图。这个时间函数的等高集都是障碍的渐伸线。因此,它的图具有图 70 所绘的形状(1978 年);这个曲面有两条阶分别为 3/2 和 5/2 的尖脊。

当我把这个曲面画给吉文塔利(1982年)看时,他认为这个曲面就是利维施科在 1981 年绘的二十面体的对称组成的群H_3的奇异轨道组成的簇。吉文塔利的这个猜测很快就被证实了:

定理(О.П.什尔巴克,1982 年)。在一般状况的平面障碍问题中,(多值)时间函数的图象微分同胚于障碍边界的拐点上的奇异轨道组成的簇。

定理(利雅施科, 1981 年)。H_3的奇异轨道组成的簇,微分同胚于有重根的多项式$x^5+ax^4+bx^2+c$组成的空间。

利雅施科的这个定理是把H_3的奇异轨道组成的簇,描述为三维空间中曲线(t, t^3, t^5)的所有切线的并,而什尔巴克处理的是任意的曲线$(t+\cdots, t^3+\cdots, t^5+\cdots)$。

在三维空间的障碍问题中,一般状况的面在渐近射线与障碍曲面相切的点上,必定有同一类型的奇点。

在本文中，我甚至都没有提到拉格朗日奇点理论和勒让德奇点理论的许多重要的方面，特别是整体理论这一方面，诸如奇点的共存性的理论、拉格朗日配边理论和勒让德配边理论（埃利亚什伯格将它们化成了同伦的问题）以及瓦西里叶夫的拉格朗日示性类和勒让德示性类（它们都是马斯洛夫类的高维推广）等等。

我甚至也没有提到简单投影的庞大的分类（戈吕诺夫，1981 年）。例如，在这个分类理论中，例外的根系统 F_4 是一个整族的子孙 $F\mu$ 的祖先。这些理论的详细内容以及一个庞大的有关的书目，都可在推荐文献的第一至五章这一栏下的第四个文献和第十三章这一栏下的第四个文献里找到。

尽管从惠更斯直到现在，已经过去了三个世纪，在射线系的几何学中也取得了一些进展。但是，绘出与人们在惠更斯的工作中找到的非常类似的图形，仍然是这个困难的领域里新发现的主要源泉之一。在这个领域里，甚至连三维的问题也依然没有解决，而且大量有用但出人意料的与数学的其他一些分支的相互关系（譬如，障碍问题与二十面体的对称群 H_3 的关系）也仍然是个谜。

附录三　弗拉基米尔·伊加雷韦奇·阿诺尔德访问记①

斯米尔卡·兹达拉符科符斯卡②

1987年6月12日是弗拉基米尔·伊加雷韦奇·阿诺尔德的50岁生日。他在19岁的时候，就因证明每一个三个变量的连续函数都可表为几个两个变量的连续函数的叠加，而一举成名。这个结果完成了（由他的导师柯尔莫哥洛夫开创的）希尔伯特第十三个问题的最直截了当的解释的证明（人们相信这个问题的逆也是对的）。阿诺尔德1959年毕业于莫斯科国立大学的数学力学系。在1961年，他因叠加方面的工作而获得副博士学位（这相当于美国的哲学博士学位）。他在这方面的工作也使他赢得了莫斯科数学学会颁发的青年数学家奖。

阿诺尔德是KAM（柯尔莫哥洛夫-阿诺尔德-摩舍）理论的创立者之一。例如，根据这个理论，在哈密顿系统的小扰动之下，大多数不变环面都不会消失，而只会发生轻微的形变。这个理论在数学以外，例如在天体力学中和在等离子储备系统(plasma holding system)里磁力线的特性的研究中，找到了大量的应用。他由于扰动理论方面的工作而在1963年获得科学博士学位，并在1965年与柯尔莫哥洛夫联袂获苏联最高荣誉奖——列宁奖。

阿诺尔德还找到了一种研究理想气体的流体动力学的新方法，那就是把理想气体的欧拉方程，看作是保体积的微分同胚组成的无穷维李群上测地线的方程。他证明了这个群在许多方向上的截面曲率都是负的。这种负曲率的存在，是这种流体运动具有不可预测性的原因。

① 本文原题为"Conversation with Vladimir Igorevich Arnol'd"，译自《数学益智》(The Mathematical Intelligencer) 1987年第9卷第4期第28页至31页。——中译者

② 斯米尔卡·兹达拉符科符斯卡(Smilka Zdravkovska)生于南斯拉夫的斯科普里市。她在阿诺尔德的指导下，从莫斯科国立大学（数学力学系）获得大学文凭，后在英格兰获得哲学博士学位，导师是弗兰克·亚当斯(Frank Adams)。她在斯科普里大学任教授直到1979年，以后又在佛罗里达大学教了一年书，自此之后一直是《数学评论》的副主笔。她目前的数学兴趣是在代数拓扑和几何拓扑上。

阿诺尔德还是焦散面和波阵面的奇点与变态的理论的创立者。这个理论的基础，就是阿诺尔德发现的这些对象与正多面体的几何和晶体的对称群之间的联系。这个理论最重要的结果就是他的光滑函数的临界点的分类。

实代数几何最近10年来的迅猛发展，也始于阿诺尔德1971年的一篇专论实代数曲线的卵形线的位置的文章。他的这篇文章把实代数几何与现代拓扑学联系了起来。

阿诺尔德发现的彭加勒大定理的高维推广，在辛几何和变分法中引起了反响。

弗拉基米尔·伊加雷韦奇还撰写了许多本书，其中有两本著名的教科书，一本是关于常微分方程的，另一本是关于经典力学中的数学方法的。他创造活动的大部分是由他与其学生们的合作组成的。他担任莫斯科数学学会的副主席约有20年了。在1984年，他当选为苏联科学院的通讯院士。从1965年起，他就一直是斯捷克洛夫数学研究所的研究员和莫斯科国立大学的教授。此外，他还是许多数学刊物的编辑委员会的成员。在1982年，他与尼伦伯格一起，获得了由瑞典科学院颁发的第一届国际克雷福德奖〔关于这个奖，请看《自然》，(1980年11月288卷第6期第7页)杂志上题为《填补诺贝尔奖的空白》(Plugging Nobel Gap)的文章；关于阿诺尔德获得此奖的报道，请看《自然》(1982年第10期第107页至108页)上的文章〕。他还被邀请在两届国际数学家大会上作全会报告。他是巴黎大学的荣誉博士(1974年)，也是美国国家科学院(1983年)、法国科学院(1984年)和美国文理科学院(1987年)等的外籍院士。

最后，他还因其几乎天天必有的马拉松式的垂钓、骑车、游泳或滑雪旅行而闻名。

下文是1987年4月的一天我与他谈话的摘录。我们是用俄语交谈的；我将它译成了英文。

问：作为导师，柯尔莫哥洛夫的形象怎样？

答：爱因斯坦在他的自传中说："现代教学方法没有完全扼杀神圣的好奇心，就已经可以说是个奇迹了：对于这株脆弱的小苗木来说，除了激励之外，主要还需要自由。"看来，安德列伊·尼古拉耶维奇·柯尔莫哥洛夫是按照这个忠告去做的。他从不解释任何东西，只是提出一些问题，而且也不把它们嚼碎。他给了学生完全的自主权。他也从不强迫学生去做什么，而总是等

待着从学生那里听到惊人的消息。他完全尊重学生的个性这一点，是我所遇到的教授中最为突出的。我只记得有一次他干涉过我的工作：在 1959 年，他要我从一篇论圆周的自映射的文章中，去掉关于在心跳中的应用的一节，接着说道："这不是人们应该研究的经典问题中的一个。" 25 年后，格拉斯发表了这个理论在心跳理论中的应用，而我当时却不得不把我的精力集中于同一个理论在天体力学中的应用。

问：您花了大量的时间与学生们一起工作，这对您的研究是否有帮助？

答：就我的学生们而言，我是非常幸运的。在他们中有许多出色的数学家，我为他们的成就感到骄傲。其中一些像瓦尔琴科、霍瓦斯基、涅河罗雪夫、库什尼列因科、吉文塔利、瓦西里叶夫、利雅施科、О.П.什尔巴克，还是独立的科学家，与他们合作是件愉快的事。我可以将一些与我有大量合作的非常著名的数学家看作是我的学生：伊利雅申科、盖布里叶洛夫、古塞因-扎德、贝恩斯坦因、涅伊施塔特（他们起先从师于他人）以及代数几何学家秋林（在他还是中学生时我就教过他）。顺便说一句，我也教过著名的数论专家阿尔希波夫和沃罗宁，当时他们还是中学生。

我也很重视我现在这一代学生的工作。这一代学生有：巴赫丁、卡扎里亚因、沙彼罗、金兹布尔格、切卡诺夫、赫辛、鲍戈叶夫斯基、彼德罗夫-塔尼金、戈吕诺夫和扎卡留金等。

我所感兴趣的问题，通常比我正着手解决的要多，而我的学生们为我分担这项工作，对我帮助良多。

问：关于数学，您念些什么？

答：对于我来说，要想读当代数学家们的著述，几乎是不可能的。因为他们不说"彼嘉洗了手"，而只是写道："存在一个 $t_1<0$，使得 t_1 在自然的映射 $t_1\to$ 彼嘉 (t_1) 之下的像属于脏手组成的集合，并且还存在一个 t_2，$t_1<t_2\leqslant 0$，使得 t_2 在上面提到的映射之下的像属于前一句中定义的集合的补集。" 不过，有几位数学家——比方说米尔纳和斯梅尔——所写的文章是仅有的没有这么做的例子。

我所研究的大多数文章，都由我的学生们或者我的朋友们负责向我解释。我对上个世纪的数学家们尤其是彭加勒的著述有更好的理解，但我发现17世纪的数学家们的那些著述最清晰而且实际上也更现代。顺便说一说，依我看，从惠更斯和牛顿到黎曼和彭加勒这二百年的间隔，是数学的仅仅充斥着计算的荒芜时代。

依我看，从惠更斯和牛顿到黎曼和彭加勒这二百年的间隔，是数学的仅仅充斥着计算的荒芜时代。

我愿意提一提，最近我在牛顿的《原理》中找到的一个关于阿贝尔积分的拓扑的定理。数学家们以前似乎没有注意到这个定理，因为牛顿走在他那个时代之前约二百年，可以自由地使用解析开拓的思想，而解析开拓在今天称之为单值化。我们说一条卵形线是可代数平方的，如果用一条直线从它切下的那一块的面积是该直线的代数函数。牛顿的这个定理是说不存在 ∞ 的可代数平方的卵形线，但存在除一点外处处是 ∞ 的可代数平方的卵形线，在那一点上对于任意大的 n 它是 C^n 的。

今年是《原理》出版三百周年纪念。因此，我还要说一说那里提到的另一个问题。这个问题是一个关于回转体在非常稀疏的介质中沿它的轴运动具有最小阻力的变分问题。在这个问题上，牛顿走在他那个时代前面三百年：它的极值曲线不是光滑的，而是有一个断点，牛顿知道这一事实。如季霍米罗夫告诉我的那样，这个断点出现在牛顿的一个图上，但在《原理》后来的一些版本中的那个图上却没有了这个点。因为直到现在，当这个问题已成为一个与宇宙航行学有关的课题时，数学家们还是未能明白牛顿所说的是什么。

问：有一些数学家是用代数的方式进行思考，也有一些是用几何的方式进行思考，还有一些是用物理的方式进行思考。您认为您是属于哪一类的呢？

答：我所记得的头一个问题是一个算术问题：两个老妪同时从两个不同的城市出发，相向而行；她们在正午相遇，之后都到达了对方出发时所在的城市，一个是在下午 4 时到的，另一个是在下午 9 时到的。请问她们是何时出发的？当时还没有学代数，这个问题的解决（基于相似理论，这个理论可以看作是一种物理理论）给我留下了非常强烈的印象，有一种发现者的感觉，就像以后每当我能够找到乍看似乎相距甚远的事物之间的联系时，譬如利用四维流形的拓扑在实代数曲线的理论与二次型的算术之间架起了桥梁时，所出现的感觉。

然而，我常常是用几何的方式进行思考的：绘出图形而不是写下公式。

问：您认为数学中的哪一个研究领域最有前途？

答：数学有一个人们所不能不赞叹的性质，就是它的最抽象因而乍一看毫无用处的一些分支，只要它们是美的，便具有超凡的效能。我非常喜欢维

恩伯格在 1986 年 10 月份的《美国数学会通告》(Notices of the AMS, 728 页)上对超凡效能所做的解释:"这是因为一些数学家为了预知哪一类数学在科学上将是重要的,而把灵魂出买给了魔鬼。"但是,在我看来,一方面当代数学著述的绝大部分并未能满足美学上的要求,因而另一方面也就绝不会有什么用处。也许不但过去情况总是如此,也是数学的所必需部分将产生的不可缺少的条件。

一大群苏联数学家以比较严肃的态度,试图在一套多卷本的著作《数学的当代问题:基本方向》中阐述他们关于数学的观点。自 1985 年起,这套书已出版了十二卷。我比较喜欢《代数学 I》(沙法列维奇)和《拓扑学 I》(С. П. 诺维科夫与富克斯合著)这两卷。我也参加了几卷的撰写,它们是《动力系统 I》(与安罗索夫和伊利雅申科合著)、关于辛几何的综述(与吉文塔利合写)、关于分歧理论的综述(与伊利雅申科、阿夫拉依莫维奇和希里尼科夫合写)和关于突变理论的综述,等等。施普林格出版公司把这些著作都译成了英文。

问:看来,西方和苏联的数学活动方式的差别之一是,你们这里的数学家都集中在一两个中心。这种状况有些什么长处和弊病?

答:大多数活跃的数学家都集中在莫斯科和列宁格勒这两个地方,就为我们提供了使被地理分隔开的数学家们能经常接触的机会。例如,我曾有幸与一些同时在同一所大学里工作的数学家,像柯尔莫哥洛夫、彼得罗夫斯基、博哥留波夫、柳斯特尔尼克、邦德里亚金 (Л.С. Понтрягин)、П.С. 诺维科夫、马尔可夫、盖尔法德、沙法列维奇、罗赫林、盖尔芳德、辛钦、亚历山大洛夫、登肯、维图什金、希洛夫和波斯特尼科夫,以及一些物理学家,像列昂托维奇、阿尔齐莫维奇、塔姆、兰道、E.M.利福什兹和И.M.利福什兹,等一起进行研究。同时,与我的下述一些同学,参加了同一个讨论班:阿列克谢耶夫、西纳依、安诺索夫、马宁、С.П.诺维科夫、基里洛夫、富克斯、朱丽娜、温别尔格和帕拉莫朵夫,马斯洛夫和法捷耶夫要年长几岁。

大多数活跃的数学家都集中在莫斯科和列宁格勒这两个地方,就为我们提供了使被地理分隔开的数学家们能经常接触的机会。

这样集中的弊病是,年青数学家们难以找到职位,而他们又都想在莫斯科或列宁格勒工作,在这两个地方要想找到一份工作是越来越难了。

问:最近(在 1986 年 12 月)政治局正式通过了一项关于在苏联增强数学作用的决议。您认为这项决议对这里的数学状况会有怎样的影响?

答:在 60 年代初期,一大群能力很强的数学家同时拥入莫斯科,就与 1953 年之后数学发展的条件急剧地改善紧密相关。人们可以期望现在的改革① 将会有类似的满意结果,尽管它们并不会马上到来。

问:请告诉我们,您最近为什么从莫斯科国立大学转到斯捷克洛夫数学研究所并以它为主要机关?

答:我不得不离开莫斯科国立大学,是因为在 1973 年彼得罗夫斯基故去之后数学系的条件恶化了。自 1953 年以来,彼得罗夫斯基一直是校长,他为莫斯科的数学发展做了大量的工作。随后,几乎同时继任校长霍赫洛夫在登山探险队里也意外地故去了。很难预料专家们权限的逐步降低(甚至戈尔巴乔夫也谈到了这点)给数学发展和整个国家所带来的后果。

问:传闻您卷入了优先权之争。这是真的吗?

答:我从来没有引起过优先权之争,不管是与苏联的数学家还是与西方的数学家。与西方数学家不和,似乎会引起这类问题,但并不涉及某某结果是属于谁这样的事,而是涉及到这样一个问题:当一个结果最早是发表在一本俄文的著作中,而如果之后西方又发表了一个类似的结果,那么人们是否应该引用那本俄文的著作呢? 西方人通常大致是这样引用的:"这个结果属于N(见[x]),之后[y]出现了"。这里的[y]是一篇俄文文章的1979年发表的英文译文。它的原文包含有这个结果的证明,是 1975 年提交、1977 年发表的。而 [x] 却是某个西方作者的预印本,其中的这个结果是 1980 年才宣布的。数字上的差距有时竟达 10 年。

所有苏联的数学家都时常遇到这种情况,但大多数认为这是缺乏私人交往的一个不可避免的结果。我自己不可能抱怨别人引用少了我的工作,也绝没有抱怨过。但我坚持认为,西方数学家们应当适当地引用我的老师们(特别是柯尔莫哥洛夫、博哥留波夫和安德洛诺夫)以及我的学生们的文章。

让我们从书架上随手拿一期《数学创作》,来数一数参考文献和俄文文章的篇数。在(1986 年 86 卷第 2 期) 8 篇文章的 156 篇参考文献之中,即使把这些(贝林松的著作)在法国发表的算在内,也只有两篇文章系苏联数学家所作。《引用索引》(Index of Citations, Garfield) 统计的结果更糟,是一个七

① Перестройка("改革")是当今苏联的时髦语之一,类似的时髦语还有сокра-щение("精简")与гласность("开放")。

百对一的比率。这似乎使我联想到这是一种联合抵制行动。为了比较，让我们从书架上拿一期《泛函分析及其应用》（1987年21卷第1期）：在5篇大文章的62篇参考文献中，22篇是俄文的，40篇是外文的。我认为这更接近真实的比率。

在某些情形下，当我见到西方发表的文章重复了俄文的著述时，我会通知该文的作者知道这件事。结果，在大多数情况下，这个作者并未有意识地去了解俄文的工作，但俄文的文献的的确确存在。尽管如此，我仍然认为，不

在某些情形下，当我见到西方发表的文章重复了俄文的著述时，我会通知该文的作者知道这件事。

引用平行的俄文文章的做法，太随随便便、太心安理得了。

这类误差对苏联有才华的年青人的命运，是毁灭性的打击。而外国数学家们却认为，把结果归功于无能的竞争者比归功于一个同行要更容易些。

问：您到底查不查评论性刊物？

答：切比雪夫劝告人们不要了解他人在做什么，以免损害你自己的创见。我几乎从不浏览评论性刊物，当我偶而为之时，我发现它们令人苦恼。显而易见，经典问题的捏造的答案常常得到了相当肯定的评论（由此显见，评论员甚至不怀疑这种结果的耸人听闻的本性）。《原理》的评论或许会写成这样："作者研究了圆锥曲线的一些性质。书中阐述了作者撰写本书的天文学动机。书中有许多图片，它们使得本书更为难懂。书后没有索引，命题序号的排列也极为令人遗憾。书中还宣布解决了一个变分问题，但评论员未能重新构造出它的证明。作者还对著名的笛卡尔理论是否正确表示怀疑。在评论员看来，（关于上帝是否存在的）最后结论是没有适当根据的。"此外，如果评

我几乎从不浏览评论性刊物，当我偶而为之时，我发现它们令人苦恼。

论的是一篇俄文文章，那么"由A可得B"这个定理会被译成"由B可得A"。在我年青的时候，这样的评论使我感到气愤。但现在我知道，一般水平的评论员都自动地省去了所有本质上是新的和不寻常的东西，而那些能够论及工作的实质的评论，通常要么是对模仿者的工作——众所周知的领域里的一连串的著述，这样的文章对于评论员来说要容易理解得多——的评论，要么是评论员的朋友的文章的评论。我通常只是利用《数学评论》的作者索引，来查找我所感兴趣的某位作者的作品。

问：我知道您喜欢滑雪、垂钓、骑车和游泳。那是消遣吗？

答：当我不能证出什么东西来的时候，我就穿上滑雪板，滑上40至60公里(通常是穿游泳裤)。在这段时间内，困难常常自行消解了，回来时我就有了一个现成的答案，或者不管怎样我知道下一步该怎么做了。验证之后又会发现在用这样的方法得到的这个答案中还有错，但这现在却是另一个障碍了，再用同一个方法又可以克服它。

为了消遣，除了别的以外，我还喜欢听维瓦尔迪和莫扎特的音乐以及巴赫的勃兰登堡交响乐。

答　谢

我要感谢塔佳纳·别洛克里尼兹卡亚、阿斯科尔特·霍瓦斯基和亚历山德尔·瓦尔琴科所给予的帮助。

(胥鸣伟校)

推 荐 文 献

第一—五章

更全的书目可在下列文献中找到：

T. Poston, I. Stewart: Catastrophe theory and its applications. Pitman, London-San Francisco-Melbourne 1978, 491 p.

V. I. Arnol' d, S. M. Gusein-Zade, A. N. Varchenko: Singularities of differentiable maps.

vol. I, Nauka, Moscow 1982, 304 p. (英文译本: Birkhäuser, Boston 1985, 382 p.)

vol. II, Nauka, Moscow 1984, 336 p. (英文译本: Birkhäuser, Boston, to appear)

E. C. Zeeman, B. W. W.: 1981 Bibliography on catastrophe theory. Coventry, University of Warwick 1981, 73 p.

V I. Arnol' d: Singularities of systems of rays. Usp. Mat. Nauk 38: 2 (1983), 77-147 (英文译文: Russ. Math. Surv. 38: 2 (1983), 87-176).

Itogi Nauki Tekh., Ser. Sovrem. Probl. Mat. (数学的现代问题) 22, Viniti, Moscow 1983 (英文译文: J. Sov. Math. 27: 3 (1984)).

第 六 章

彭加勒 1879 年的论文：

H. Poincaré: Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles, in: Oeuvres de Henri Poincaré, Tome I. Gauthier-Villars, Paris, 1951, XLIX-CXXIX.

将零维完全相交的通用形变定理(引理 IV, p. LXI)和标准型的方法与其它东西混杂在一起。

安德洛诺夫在下文中首次提出结构稳定性理论和分歧理论：

A. A. Andronov: Mathematical problems of the theory of self-Oscillations (in Russian), in: I Vsesoyuznâya konferentsiya pokolebaniyam, M. L., GTTI, 1933, pp. 32-72 (reprinted in Andronov' s Collected Works, Moscow 1956, pp. 85-124).

1939年发表的他与列昂托维奇合写的论文，包含了关于在其中生成了余维数为一的环的两类分歧——局部类(从平衡点生成的)和非局部类(从是鞍点的分界线的圈生成的)——的理论。请看下文：

A. A. Andronov, E. A. Leontovich: Some cases of the dependence of limit cycles on parameters (为俄文的). Uchenye Zapiski Gor' Kovskogo Gosudarstvennogo Universiteta, Issue 6, 1939, 1.

关于指数不稳定性在流体动力学中的应用，可参看：

V. I. Arnol' d: Sur la géometrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l' hydrodynamique des fluides parfaits. Ann. Inst. Fourier, 16, 1 (1966), 319-361.

与这一章内容有关的几篇新近的文章：

Yu. S. Il' yashenko: Weakly contracting systems and attractors of the Galerkin approximations of the Navier-Stokes equation (为俄文的). Usp. Mat. Nauk 36: 3 (1982), 243-244.

Yu. S. Il' yashenko, A. N. Chetaev: Weakly contracting systems and attractors of the Galerkin approximations of the Navier-Stokes equations on a two-dimersional torus (为俄文的). Uspekhi Mekh. 5: 1/2 (1982), 31-63.

A. V. Babin, M. I. Vishik: Attractors of partial differential evolution equations and estimates of their dimension. Usp. Mat. Nauk 38:4 (1983), 133-187(英文译文: Russ. Math. Surv. 38: 4 (1983), 151-213).

博格达洛夫定理公布在下文中：

V. I. Arnol' d: Lectures on bifurcations in versal families. Usp. Mat.

Nauk 27:5 (1972), 119-184 (英文译文: Russ. Math. Surv. 27:5 (1972), 54-123).

这个定理的几个证明可在下面几篇文章中找到:

R. I. Bogdanov: Bifurcation of the limit cycle of a family of plane vector fields. Tr. Semin. Im. I. G. Petrovskogo 2 (1976), 23-35(英文译文: Sel. Math. Sov. 1 (1981), 373-387).

R. I. Bogdanov: Versal deformation of a singularity of a vector field on the plane in the case of zero eigenvalues. Tr. Semin. Im. I. G. Petrovskogo 2 (1976), 37-65(英文译文: Sel. Math. Sov. 1 (1981), 389-421).

阶为 2、3 或 5 的对称的情形:

V. K. Melnikov: Qualitative description of resonance phenomena in nonlinear systems (为俄文的). Dubna, O. I. Ya. F., P-1013 (1962), 1-17

E. I. Khorozov: Versal deformations of equivariant vector fields for the cases of symmetry of order 2 and 3 (为俄文的). Tr. Semin. Im. I. G. Petrovskogo 5 (1979), 163-192.

阶为 4 的对称:

V. I. Arnol' d: Loss of stability of self-oscillations close to resonance and versal deformations of equivariant vector fields. Funkts. Anal. Prilozh. 11:2 (1977), 1-10 (英文译文: Funct. Anal. Appl. 11 (1977), 85-92).

A. I. Nejshtadt: Bifurcations of the phase pattern of an equation system arising in the problem of stability loss of selfoscillations close to 1:4 resonance. Prikl. Mat. Mekh. 42 (1978), 830-840 (英文译文: J. Appl. Math. Mech. 42 (1978), 896-907).

F. S. Berezovskaya, A. I. Khibnik: On the bifurcation of separatrices in the problem of stability loss of auto-oscillations near 1:4 resonance. Prikl. Mat. Mekh. 44 (1980), 938-943 (英文译文: J. Appl. Math. Mech. 44 (1980), 663-667).

第七章

列旺托弗斯基的有限定理的证明见下文：

L. V. Levantovskij: Singularities of the boundary of the stability domain. Funkts. Anal. Prilozh. 16:1 (1982), 44-48 (英文译文: Funct. Anal. Appl. 16 (1982), 34-37).

第八章

关于从在其它一些文献中提出的理论得出的不同方法和不同结果，请比较：

G. Wassermann: Stability of unfoldings in space and time. Acta Math. 135 (1975), 57-128.

波阵面的变态的图形最早出现在下文中：

V. I. Arnold: Critical points of smooth functions, in: Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, 1974) vol. 1. Canadian Mathematical Congress 1975, pp. 19-39.

焦散面和波阵面的变态的理论依赖于下文的结果：

V. I. Arnol' d: Wave front evolution and equivariant Morse lemma. Commun. Pure Appl. Math. 29 (1976), 557-582.

以及下文的结果：

V. M. Zakalyukin 的学位论文 (为俄文的). Moscow State University, 1978, 145 p.

上文的一部分结果发表在下述两篇文章中：

V. M. Zakalyukin: Reconstructions of wave fronts depending on one parameter. Funkts. Anal. Prilozh. 10:2 (1976), 69-70 (英文译文: Funct. Anal. Appl. 10 (1976), 139-140).

V. M. Zakalyukin: Legendre mappings in Hamiltonian systems, in: Some Problems of mechanics (为俄文的). MAI, Moscow 1977, pp. 11-16.

焦散面的变态的图形最早发表在这个小册子的俄文第一版中：

V I. Arnol' d: Catastrophe theory (为俄文的). Priroda, Issue 10, 1979, 54-63.

在这篇文章的坎特的法译本 (Matematica, May 1980, 3-20) 中，这个图形被代之以一页汤姆的评注。

V. M. Zakalyukin: Reconstructions of fronts and caustics depending on a parameter and versality of mappings, in: Itogi Nauki Tekh,., Ser. Sovrem. Probl. Mat. (Contemporary Problems of Mathematics) 22, Viniti, Moscow 1983, pp. 56-93 (英文译文: J. Sov. Math. 27 (1984), 2713-2735).

关于双重焦散面的理论，见下文：

V. I. Arnol' d: Restructurings of singularities of potential flows in a collision-free medium and metamorphoses of caustics in three-dimensional space (为俄文的). Tr. Semin. Im. I. G. Petrovskogo 8 (1982), 21-57.

在1980年秋季的彼得罗夫斯基讨论班上公布了这些结果（见 Usp. Mat. Nauk 36:3 (1981)），并且这些图形最先出现在这本书的1981年的俄文版中。在其它情形中，这些曲面的一些后来出现在什尔巴克、盖弗雷和普莱希斯(du Plessis)等人的工作中（在什尔巴克的工作中，是以空间曲线的切线并的形式出现的）。

焦散面和波阵面的奇点的直至十维的分类：

V. M. Zakalyukin: Lagrangian and Legendrian singularities. Funkts. Anal. Prilozh. 10:1 (1976), 26-36, (英文译文: Funct. Anal. Appl. 10 (1976), 23-31).

及其修正：

V. I. Arnol' d, S. M. Gusein-Zade, A. N. Varchenko: Singularities of differentiable maps I: The classification of critical points, caustics and wave fronts. Nauka, Moscow 1982, §21 (英文译文: Birkhäuser,

Boston 1985).

关于冰的运动的工作：

J. F. Nye, A. S. Thorndike: Events in evolving three-dimensional vector fields. J. Phys. A13 (1980), 1-14.

第九章

Ya. B. Zeldovich: Gravitational instability: an approximate theory for large density perturbations. Astron. Astrophys. 5 (1970), 84-89.

V. I. Arnol'd, S. F. Shandarin, Ya. B. Zeldovich: The Large Scale Struclure of the Universe I. General properties. One and Two-Dimensional Models. Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 20 (1982), 111-130.

V. I. Arnol'd: Restructurings of singularities of potential flows in a collision-free medium and metamorphoses of caustics in three-dimensional space (为俄文的). Tr. Semin. Im. I. G. Petrovskogo 8 (1982), 21-57.

V. I. Arnol'd: Some Algebro-Geometrical Aspects of the Newton Attraction Theory, in: Arithmetic and Geometry II: Geometry. Prog. Math. 36, Birkhäuser, Boston 1983, 1-3.

S. F. Shandarin, Percolation theory and cellular structure of the universe (为俄文的). Preprint, Inst. Appl. Math., USSR Academy of Sciences, 1982 n 137, 1982, 1-15.

第十章

L. N. Bryzgalova: Singularities of the maximum of a parametrically dependent function. Funkts. Anal. Prilozh. 11:1 (1977), 59-60(英文译文: Funct. Anal. Appl. 11 (1977), 49-51).

L. N. Bryzgalova: Maximum functions of a family of functions depending on parameters. Funkts. Anal. Prilozh. 12:1 (1978), 66-67 (英文译文: Funct. Anal. Appl. 12 (1978), 50-51).

V. A. Vasil'ev: Asymptotic exponential integrals, Newton's diagram,

and the classification of minimal points. Funkts. Anal. Prilozh. 11: 3 (1977), 1-11 (英文译文: Funct. Anal. Appl. 11 (1977), 163-172).
V. I. Matov: The topological classification of germs of the maximum and minimax functions of a family of functions in general position. Usp. Mat. Nauk 37:4 (1982), 129-130 (英文译文: Russ. Math. Surv. 37:4 (1982), 127-128).
V. I. Matov: Ellipticity domains for generic families of homogeneous polynomials and extremum functions (为俄文的). Funkts. Anal. Prilozh. 19:2 (1985), 26-36 (英文译文将发表在 Funct. Anal. Appl. 19 (1985)上).

第十一章

达维多夫的分类公布在他的学位论文中：

A. A. Davydov: Singularities in two-dimensional control systems (为俄文的). Moscow State University, 1982, 149 p.

这些结果也公布在下面的两篇文章中：

A. A. Davydov. Singularities of the admissibility boundary in two-dimensional control systems. Usp. Mat. Nauk 37:3 (1982), 183-184 (英文译文: Russ. Math. Surv. 37:3 (1982), 200-201).
A. A. Davydov: The boundary of attainability of 2-dimensional control systems (为俄文的). Usp. Mat. Nauk 37:4 (1982), 129.

它们的证明(部分)发表在下面的文章中：

A. A. Davydov: The boundary of an attainable set of a multidimensional control system (为俄文的). Tr. Tbilis. Univ. 232-233, ser. Mat. Mekh. Astron. 13-14 (1982), 78-96.

(on the Lipschitz and Hölder continuity of the boundary), 和下面的文章中：

A. A. Davydov: Normal forms of a differential equation, not resolved with respect to the derivative, in a neighbourhood of a singular point (为俄文的). Funkts. Anal. Prilozh. 19:2 (1985), 1-10 (英文译文

将出现在 Funct. Anal. Appl. 19 (1985)).
达维多夫的这些定理的阐述可在下书中找到：
V. I. Arnol'd: Ordinary differential equations (3rd edition) (为俄文的). Nauka, Moscow 1984, 272 p., pp. 266-267.

凸包的奇点：三维空间中的曲面：
V. M. Zakalyukin: Singularities of convex hulls of smooth manifolds. Funkts. Anal. Prilozh. 11:3 (1977), 76-77 (英文译文: Funct. Anal. Appl. 11 (1977), 225-227).

三维空间中的曲线：
V. D. Sedykh: Singularities of the convex hull of a curve in R^3. Funkts. Anal. Prilozh. 11:1 (1977), 81-82 (英文译文: Funct. Anal. Appl. 11 (1977), 72-73).

一般情形：
V. D. Sedykh: Singularities of convex hulls. Sib. Mat. Zh. 24:3 (1983), 158-175 (英文译文: Sib. Math. J. 24 (1983), 447-461).
V. D. Sedykh: Functional moduli of singularities of convex hulls of manifolds of codimensions 1 and 2. Mat. Sb., Nov. Ser. 119 (161) (1982), 233-247 (英文译文: Math. USSR, Sb. 47 (1984), 223-236).

第十二章
Y. L. Kergosien, R. Thom: Sur les points paraboliques des surfaces. C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. A 290 (1980), 705-710.
(其中的一些错误在 C. R. 第二年的一个注记中部分地得到了更正：
Y. L. Kergosien: La famille des projections orthogonales d'une surface et ses singularités. C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. I 292 (1981), 929-932.)

O. A. Platonova: Singularities of projections of smooth surfaces. Usp. Mat. Nauk 39:1 (1984), 149-150 (英文译文: Russ. Math. Surv. 39:1

(1984), 177-178).

O. A. Platonova: Singularities of the mutual disposition of a surface and a line. Usp. Mat. Nauk 36:1 (1981), 221-222 (英文译文: Russ. Math. Surv. 36:1 (1981), 248-249).

O. A. Platonova: Projections of smooth surfaces (为俄文的). Tr. Semin. Im. I. G. Petrovskogo 10 (1984), 135-149.

(这些文章只是下文的一部分:

O. A. Platonova's Thesis (为俄文的). Moscow State University, 1981, 150 p.).

E. E. Landis: Tangential singularities. Funkts. Anal. Prilozh. 15:2 (1981), 36-49 (英文译文: Funct. Anal. Appl. 15 (1981), 103-114).

(这篇文章包含了下文的结果:

E. E. Landis's Thesis (为俄文的). Moscow State University, 1983, 142 p.).

V. I. Arnol'd: Singularities of systems of rays. Usp. Mat. Nauk 38:2 (1983), 77-147 (英文译文: Russ. Math. Surv. 38:2 (1983), 87-176).

O. P. Shcherbak: Projectively dual space curves and Legendre singularities (为俄文的). Tr. Tbilis. Univ. 232-233, ser. Mat. Mekh. Astron. 13-14 (1982), 280-336.

关于这些投影的定理的证明依赖于下文:

V. I. Arnol'd: Indices of singular points of 1-forms on a manifold with boundary, convolution of invariants of reflection groups, and singular projections of smooth surfaces. Usp. Mat. Nauk 34:2 (1979), 3-38 (英文译文: Russ. Math. Surv. 34:2 (1979), 1-42).

其它的一些方法:

T. Banchoff, T. Gaffney, C. McCrory: Cusps of Gauss mappings. Res. Notes Math. 55, Pitman, Boston-London-Melbourne 1982.

一篇关于投影的奇点的综述：
V. V. Goryunov: Singularities of projections of full intersections, in: Itogi Nauki Tekh., Ser. Sovrem. Probl. Mat. (数学的现代问题) 22, Viniti, Moscow 1983, pp. 167-206 (英文译文: J. Sov. Math. 27 (1984), 2785-2811).

也可参看下面的文章：
V. V. Goryunov: Geometry of bifurcation diagrams of simple projections onto the line. Funkts. Anal. Prilozh. 15:2 (1981), 1-8 (英文译文: Funct. Anal. Appl. 15 (1981), 77-82).
V. V. Goryunov: Projection of O-dimensional complete intersections onto a line and the k (л, 1) conjecture. Usp. Mat. Nauk 37:3 (1982), 179-180 (英文译文: Russ. Math. Surv. 37:3 (1982), 206-208).
V. V. Goryunov: Bifurcation diagrams of some simple and quasihomogeneous singularities. Funkts. Anal. Prilozh. 17:2 (1983), 23-37 (英文译文: Funct. Anal. Appl. 17 (1983), 97-108).

第十三章
V. I. Arnol' d: Critical points of functions on a manifold with boundary. the simple Lie groups Bk. Ck, and F_4 and singularities of evolutes. Usp. Mat. Nauk. 33:5 (1978), 91-105 (英文译文: Russ. Math. Surv. 33:5 (1978), 99-116).
O. A. Platonova: Singularities in the problem of the quickest by-passing of an obstacle. Funkts. Anal. Prilozh. 15:2 (1981), 86-87 (英文译文: Funct. Anal. Appl. 15 (1981), 147-148).
O. A. Platonova: Singularities of a ray system at an obstacle (为俄文的). Preprint, Dep. Viniti 11 Feb. 1981, n 647-81, Moscow 1981, 150p.
V. I. Arnol' d: Singularities in variational calculus, in: Itogi Nauki Tekh., Ser. Sovrem. Probl. Mat. (数学的现代问题) 22, Viniti, Moscow 1983, pp. 3-55(英文译文: J. Sov. Math. 27 (1984), 2679-2713).

第十四章

拉格朗日映射奇点理论的研究始于1966年。见下列文章：

V. I. Arnol' d: Characteristic class entering in quantization conditions. Funkts. Anal. Prilozh. 1:1 (1967), 1–14(英文译文: Funct. Anal. Appl. 1 (1967), 1–13).

L. Hörmander: Fourier integral operators, I. Acta Math. 127 (1971), 79–183.

V. I. Arnol' d: Integrals of rapidly oscillating functions and singularities of projections of Lagrangian manifolds. Funkts. Anal. Prilozh. 6:3 (1972), 61–62(英文译文: Funct. Anal. Appl. 6 (1972), 222–224).

V. I. Arnol' d: Normal forms for functions near degenerate critical points, the Weyl groups of Ak, Dk, Ek and Lagrangian singularities. Funkts. Anal. Prilozh. 6:4 (1972), 3–25(英文译文: Funct. Anal. Appl. 6 (1972), 254–272).

也可参看下文：

J. Guckenheimer: Catastrophes and partial differential equations. Ann. Inst. Fourier 23, 2 (1973), 31–59.

勒让德奇点理论1974年发表在下面这本书的俄文版中：

V. I. Arnold: Mathematical Methods of Classical Mechanics. Nauka, Moscow 1974 (英文译本: Graduate Texts in Mathematics 60, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin 1978).

和下文中：

V. I. Arnol' d: Critical points of smooth functions, in: Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, 1974) vol. 1. Canadian Mathematical Congress 1975, pp. 19–39.

也可参看下列文章：

M. J. Sewell: On Legendre transformations and elementary catastrophes. Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 82 (1977), 147–163.

J. -G. Dubois, J. -P. Dufour: La théorie des catastrophes. V. Transformées de Legendre et thermodynamique. Ann. Inst. Henri Poincaré, Nouv. Ser., Sect. A 29 (1978), 1-50.

关于开燕尾，见下列文章：

V. I. Arnol' d: Lagrangian manifolds with singularities, asymptotic rays, and the open swallowtail. Funkts. Anal. Prilozh. 15:4 (1981), 1-14(英文译文: Funct. Anal. Appl. 15 (1981), 235-246).

V. I. Arnol' d: Singularities of Legendre varieties, of evolvents and of fronts at an obstacle, Ergodic Theory Dyn. Syst. 2 (1982), 301-309.

A. B. Givental': Lagrangian varieties with singularties and irreducible sl_2-modules. Usp. Mat. Nauk 38:6 (1983), 109-110(英文译文: Russ. Math. Surv. 38:6 (1983), 121-122).

A. B. Givental': Varieties of polynomials having a root of fixed comultiplicity and the generalized Newton equation. Funkts. Anal. Prilozh. 16:1 (1982), 13-18 (英文译文: Manifolds of polynomials having a root of fixed multiplicity, and the generalized Newton equation. Funct. Anal. Appl. 16 (1982), 10-14).

关于辛空间和接触空间的子流形的吉文塔利定理，最早是出现在现在这本小册子的 1981 年俄文版上。它是达布一维恩斯坦恩定理的推广，两者的差别是吉文塔利定理不要求任何关于横截向量的信息。达布一维恩斯坦恩定理的证明见下文：

A. Weinstein: Lagrangian submanifolds and hamiltonian systems. Ann. Math., II. Ser. 98 (1973), 377-410.

V. I. Arnol' d, A. B. Givental': Symplectic geometry (为俄文的), in: Itogi Nauki Tekh., Ser. Sovrem. Probl. Mat., Fundamental'nye napravleniya (数学的现代问题，基本方向) 4, Viniti, Moscow 1985 (施普林格出版公司将出版它的英文译本).

V. I. Arnol' d: Singularities in variational calculus, in: Itogi Nauki

Tekh., Ser. Sovrem. Probl. Mat. (数学的现代问题) 22, Viniti, Moscow 1983, pp. 3–55(英文译文: J. Sov. Math. 27 (1984), 2679–2713).

R. B. Melrose: Equivalence of glancing hypersurfaces. Invent. Math. 37 (1976), 165–191.

R. B. Melrose: Equivalence of glancing hypersurfaces. II. Math. Ann. 255 (1981), 159–198.

J. Martinet: Sur les singularites des formes differentielles. Ann. Inst. Fourier, 20, 1 (1970), 95–178.

R. Roussarie: Modèles locaux de champs et de formes. Astérisque 30 (1975).

M. Golubitsky, D. Tischler: An example of moduli for singular symplectic forms. Invent. Math. 38 (1977), 219–225.

第十五章

更详细的内容见下列文章：

E. Brieskorn, H. Knörrer: Ebene algebraische Kurven. Birkhäuser, Boston 1981, 964 p.

J. Milnor: Singular points of complex hypersurfaces. Ann. Math. Stud. 61, Princeton University Press 1968, 122 p.

V. I. Arnol' d, S. M. Gusein-Zade, A. N. Varchenko: Singularities of differentiable maps II: Monodromy and asymptotics of integrals. Nauka, Moscow 1984, 336 p. (英文译本: Birkhäuser, Boston, 即将出版).

E. Brieskorn: Die Milnorgitter der exzeptionellen unimodularen Singularitäten. Bonn. Math. Schr. 150, Math. Inst. der Universität Bonn, 1983, 225 p.

关于二十面体的参考文献：

O. V. Lyashko: Classification of critical points of functions on a manifold with singular boundary. Funkts. Anal. Prilozh. 17:3 (1983), 28–36(英文译文: Funct. Anal. Appl. 17 (1983), 187–193).

O. P. Shcherbak: Singularities of families of evolvents in the neigh-

borhood of an inflection point of the curve, and the group H_3 generated by reflections. Funkts. Anal. Prilozh. 17:4 (1983), 70–72(英文译文: Funct. Anal. Appl. 17 (1983), 301–303).

第十六章

A) 箭集:

P. Gabriel: Unzerlegbare Darstellungen I. Manuscr. Math. 6 (1972), 71–103.

I. N. Bernshtejn, I. M. Gel'fand, V. A. Ponomarev: Coxeter functors and Gabriel's theorem. Usp. Mat. Nauk 28:2 (1973), 19–33 (英文译文: Russ. Math. Surv. 28:2 (1973), 17–32).

L. A. Nazarova, A. V. Rojter: Polyquivers and Dynkin schemes. Funkts. Anal. Prilozh. 7:3 (1973), 94–95(英文译文: Funct. Anal. Appl. 7 (1973), 252–253).

V. Dlab, K. M. Ringel: Representation of graphs and algebras. Carleton Math. Lect. Notes 8, Carleton University, Ottawa 1974.

B) 柏拉图主义者(Platonics):

J. McKay: Cartan matrices, finite groups of quaternions, and Kleinian singularities. Proc. Am. Math. Soc. 81 (1981), 153–154.

C) 边界奇点:

G. Wassermann: Classification of singularities with compact abelian symmetry. Regensburger Math. Schr. 1, Fachbereich Mathematik der Universität Regensburg, 1977.

V. I. Arnol'd: Critical points of functions on a manifold with boundary, the simple Lie groups Bk, Ck, and F_4 and singularities of evolutes. Usp. Mat. Nauk 33:5 (1978), 91–105 (英文译文: Russ. Math. Surv. 33:5 (1978), 99–116),

M. Golubitsky, D. Schaeffer: A theory for imperfect bifurcation via singularity theory. Commun. Pure Appl. Math. 32 (1979), 21–98.

D. H. Pitt, T. Poston: Determinacy and unfoldings in the presence

of a boundary, preprint.
下面这本书的第十六章的第六节是上文的复述：
T. Poston, I. Stewart: Catastrophe theory and its applications. Pitman, London-San Francisco-Melbourne 1978, 491 p.

P. Slodowy: Simple singularities and simple algebraic groups. Lect. Notes Math. 815, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1980, 175 p.
D. Siersma: Singularities of functions on boundaries, corners, etc. Q. J. Math., Oxf. II. Ser. 32 (1981), 119–127.
V. I. Matov: Singularities of the maximum function on a manifold with boundary (为俄文的). Tr. Semin. Im. I. G. Petrovskogo 6 (1981), 195–222.
V. I. Matov: Unimodal and bimodal germs of functions on a manifold with boundary (为俄文的). Tr. Semin. Im. I. G. Petrovskogo 7 (1981), 174–189.
I. G. Shcherbak: Duality of boundary singularities. Usp. Mat. Nauk 39:2 (1984), 207–208 (英文译文: Russ. Math. Surv. 39:2 (1984), 195–196).
I. G. Shcherbak: Focal set of a surface with boundary, and caustics of groups generated by reflections Bk, Ck, and F_4. Funkts. Anal. Prilozh. 18:1 (1984), 90–91(英文译文: Funct. Anal. Appl. 18 (1984), 84–85).

带边流形的拉格朗日奇点：
Nguyễn hữu Đức, Nguyễn tiến Đai: Stabilité de l' interaction géométrique entre deux composantes holonomes simples. C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. A 291 (1980), 113–116.
G. G. Ilyuta: Monodromy and vanishing cycles for boundary singularities (为俄文的). Funkts. Anal. Prilozh. 19:3 (1985), 11–21 (英文译文将发表在 Funct. Anal. Appl. 19 (1985)).

D)群 H_3 和 H_4.

O. V. Lyashko: Classification of critical points of functions on a manifold with singular boundary. Funkts. Anal. Prilozh. 17:3 (1983), 28-36(英文译文: Funct. Anal. Appl. 17 (1983), 187-193).

O. P. Shcherbak: Singularities of families of evolvents in the neighbourhood of an inflection point of the curve, and the group H_3 generated by reflections. Funkts. Anal. Prilozh. 17:4 (1983), 70-72(英文译文: Funct. Anal. Appl. 17 (1983), 301-303).

V. I. Arnol'd: Singularities in variational problems (为俄文的). Usp. Mat. Nauk 39:5 (1984), 256.

V. I. Arnol'd: Singularities of ray systems, in: Proceedings of the International Congress of Mathematicians, August 16-24, 1983, Warszawa vol. 1. North Holland 1984, pp. 27-49.

A. N. Varchenko, S. V. Chmutov: Finite irreducible groups, generated by reflections, are monodromy groups of suitable singularities. Funkts. Anal. Prilozh. 18:3 (1984), 1-13(英文译文: Funct. Anal. Appl. 18 (1984), 171-183)

其他文献:

[1]A. A. Andronov, A. A. Witt, S. Eh. Khajkin: Teoriya Kolebanij. Fizmatgiz, Moscow 1937. (译成英文为: A. A. Andronow, C. E. Chaikin: Theory of Oscillations. English Language Edition Edited Under the Direction of Solomon Lefschetz. Princeton University Press, Princeton 1949).

[2]Th. Bröcker, L. Lander: Differentiable Germs and Catastrophes. Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser. 17, Cambridge University Press, Cambridge 1975.

[3]H. J. Fussbudget, R. S. Znarler: Sagacity Theory: A Critique. Math. Intell. 2 (1979), 56-59.

[4]R. Gilmore: Catastrophe theory for scientists and engineers. John Wiley & Sons, New York-Chichester-Brisbane-Toronto 1981, 666 p.

[5]M. Golubitsky, V. Guillemin: Stable Mappings and Their Singu-

larities. Graduate Texts in Mathematics 14, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin 1973.

[6]J. Guckenheimer: The Catastrophe Controversy. Math. Intell. 1 (1978), 15–20.

[7]R. Thom: Stabilité Structurelle et Morphogénèse. W. A. Benjamin, Reading, Mass. 1972. (此书已有由 D. H. Fowller 译的英文本，书名为"Structural Stability and Morphogenesis"，由同一家出版机构于 1975 年出版。另外，此书的法文第二版也已于 1977 年问世，据此移译成的中文本将由商务印书馆出版。——中译者)

[8]R. Thom: Catastrophe Theory: Its present state and future perspectives, in: Dynamical Systems-Warwick 1974. Lect. Notes Math. 468, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1975, pp.366–372.

[9]H. Whitney: On Singularities of Mappings of Euclidean Spaces. I. Mappings of the Plane into the Plane. Ann. Math. 62 (1955), 374–410.

[10]E. C. Zeeman: Catastrophe theory: A reply to Thom, in: Dynamical Systems-Warwick 1974. Lect. Notes Math. 468, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1975, pp. 373–383.

[11]E. C. Zeeman: Catastrophe Theory. Selected Papers, 1972–1977. Addison-Wesley, Reading, Mass. 1977.

人名译名对照表

A

阿尔齐莫维奇　Арцимович, Л. А.
阿尔希波夫　Архипов, Г.
阿夫拉依莫维奇　Афраймович, В. С.
阿列克谢耶夫　Алексеев, В. М.
阿诺尔德　Арнольд, В. И.
阿诺索夫　Аносов, Д. В.
埃卡尔　Ecalle
埃利亚什伯格　Eliashberg, Ya. M.
爱森柏克　Ecenbeck, N.
爱因斯坦　Einstein, A.
安德洛诺夫　Андронов, А.
奥列依尼克　Олейник

B

巴宾　Бабин, А. В.
巴赫丁　Бахтин, В. И.
柏拉图　Plato
柏锐斯科恩　Brieskorn
邦德里亚金　Понтрягин, Л. С.
鲍戈叶夫斯基　Богоевский, И. А.
贝恩斯坦因　Бернштейн, Д. Н.
贝林松　Бейлинсон
彼得罗夫斯基　Петровский
彼得罗夫-塔尼金　Петров-Таньский, Г. С.
毕达哥拉斯　Pythagoras
别列佐弗斯卡亚　Березовская, Ф. С.
别洛克里尼兹卡亚　Белокриницкая, Т.
伯克霍夫　Birkhoff
伯里　Berry, M.
博哥留波夫　Боголюбов, Н. Н.
博格达诺夫　Богданов, Р. И.
波斯特尼科夫　Постников, М. М.
布雷兹加洛瓦　Барызгалова, Л. Н.
布鲁斯　Bruce

C

查勒　Zahler, R.
兹达拉符科符斯卡　Zdravkovska, S.

D

达布　Darboux, G.
达维多夫　Давыдов, А. А.
登肯　Дынкин
多罗谢维奇　Дорошевич, В. М.
杜斯特马特　Duistermaat
狄林格　Delinge
费雪　Fisher

F

法捷耶夫　Фаддеев, Л. Д.
弗狄叶拉　Vevdiere
弗洛依德　Freud, S.
富克斯　Фукс, Д. Б.

G

盖弗雷　Gaffney
盖布里叶洛夫　Габриелов, А. М.
盖尔法德　Гельфанд, И. М.
盖尔芳德　Гелфонд, А. О.
高斯　Gauss, C. F.
格拉斯　Glass, L.
戈露彼茨基　Golubitsky, M.
戈吕诺夫　Горюнов, В. В.
古肯海默　Guckenheimer, J.
古塞因-扎德　Гусейн-Заде, С. М.
范·德·波尔　Pol, Van der

H

哈代　Hardy G.
哈金　Khaikin

J

K

L

M

N

P

Q